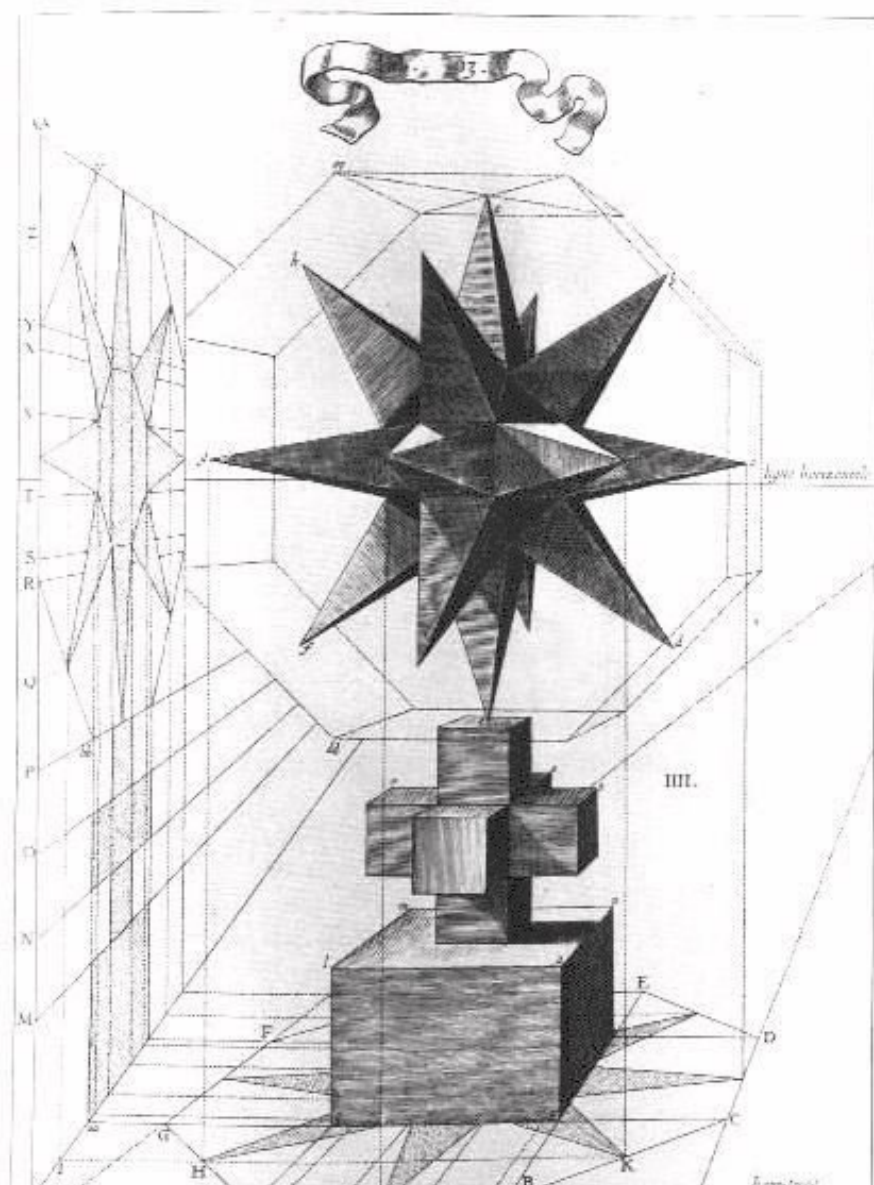

S. E. M. C. V.
AL-KHWARIZMI

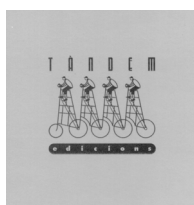
PROBLEMES OLÍMPICS

Revista de problemes de Matemàtiques
Número 10. Juny 2001



En el present número vos fem arribar les activitats proposades en la fase provincial de la XII Olimpíada Matemàtica de Secundària de la província de València. En la present edició, celebrada el 5 de Maig de 2001 a l'IES "Tirant lo Blanc" de Torrent, varen participar 200 estudiants de Secundària procedents de 49 centres de tota la província.

Al llarg de tot el curs, un equip de professors i professores ens hem reunit periòdicament per tal de preparar i dur a terme la dotzena edició de l'Olimpíada Matemàtica de Secundària a la província de València. Sense aquest treball no hauria sigut possible enguany la seua celebració. També cal agrair la col·laboració de les institucions que ens han ajudat a sufragar les despeses que aquest event ha comportat.



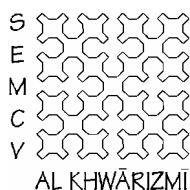
I.E.S. "TIRANT LO BLANC" (TORRENT)

Tomás Queralt Llopis. Coordinador Olimpíada Provincia de València.

Francesc Casamitjana Gámez
Josep Antoni Chaveli Gascón
Maurici Contreras del Rincón (coordinador grup)
Mariano De Heredia González
Dolors Delgado Ortega
Mercé Fort Iborra

Nicasio García Alfaro
Josep Llorenç Llisó Valverde
Encarna López Gómez
Antoni Losas González
Mari Carme Olivares Iñesta
Martín Montoya Molina





XII OLIMPIADA MATEMÀTICA
PROVINCIA DE VALÈNCIA - FASE PROVINCIAL
5 DE MAIG DE 2001 - PROVA PER EQUIPS - RELLEUS

PROBLEMES NIVELL A (2on. ESO)

PROVA Nº 1.- A - El dia del llibre.

Juanita va comprar a la seua filla Laura 25 llibres i Gema va regalar a la seua filla Clara 7 llibres. Entre les dos filles van augmentar la seua col·lecció en 25 llibres. Com s'explica este fenomen?

PROVA Nº 1.- B - Una edat molt estranya.

Després-ahir tenia 12 anys i l'any que ve faré 15. És possible esta circumstància?

PROVA Nº 2.- A - Les tres bosses de caramels.

Tinc 48 caramels en tres bosses. Si de la primera bossa passe a la segona tants caramels com hi ha en la tercera, després passe de la segona bossa 6 caramels a la primera i, per a finalitzar, passe a la tercera bossa 4 caramels de les segona. El resultat és que ara tinc la mateixa quantitat de caramels en les tres bosses. Quants caramels tenia inicialment en cadascuna?

PROVA Nº 2.- B - Càlcul familiar.

Bernarda té el doble de germans que de germanes, però si al nombre total de germans se li resta el nombre de les germanes de la família, inclosa ella, el nombre resultant és 3. Quants germans i germanes componen la família?

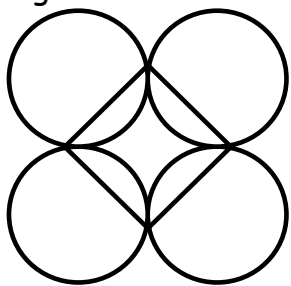
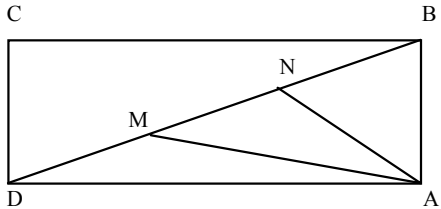
PROVA Nº 3.- A - Les tapes dels albellons.

Per què les tapes dels albellons són sempre circulars i no quadrades, hexagonals o el·líptiques?

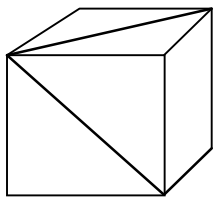
PROVA Nº 3.- B - Un rellotge de paret

Un rellotge de paret tarda 5 segons a donar les sis. Quant tardarà a donar les dotze?

Nota: albelló = alcantarilla

PROVA N° 4.- A - Ella no balla sola Mireia invita a 17 amics a la seua festa d'aniversari. Dóna un nombre a cada un i ella es queda amb el 1. Mireia observa que la suma dels nombres de cada parella era un quadrat perfecte. Amb qui balla Mireia?	PROVA N° 4.- B - Quants fulls? Brígida estava tan enfadada que va arrancar d'un llibre les pàgines 6, 7, 84, 85, 111 i 112. Quants fulls va arrancar en total?
PROVA N° 5.- A - El pastís i el pastís i mig Si un pastís pesa dos quilos més que el pes de mig pastís, quant pesarà un pastís i mig?	PROVA N° 5.- B - Els tres filets Hem de fregir tres filets. Tots els filets són del mateix tamany i només caben dos en la paella. Es tarda 1 minut a fregir cada costat del filet. Per tant, posant dos filets en la paella tardarem a fregir dos minuts, més dos minuts per a l'altre filet. Per tant, 4 minuts en total. Com podrem fregir els tres filets en només 3 minuts?
PROVA N° 6.- A - Fraccions enrevesadas Quina és la meitat dels dos terços dels tres quarts dels quatre quintos dels dels cinc sextos dels sis setèims dels set octaus dels huit novens dels nou desens de 1.000?	PROVA N° 6.- B - La història d'Amadeo Amadeo va viure una quarta part de la seua vida a Madrid, una quinta part a Granada, un terç a Sevilla, i finalment 13 anys en Zaragoza. A quina edat va morir Amadeo?
PROVA N° 7.- A - El quadrat i els quatre discos Si el diàmetre de cada disc mesura 4 cm., quin perímetre te el quadrat de la figura? 	PROVA N° 7.- B - El costat del rombe  El rectangle ABCD te 8 cm. de base i 3 cm. d'altura. Dividim la diagonal BD en tres parts iguals mitjançant els punts M i N. Quant val l'àrea del triangle MAN?

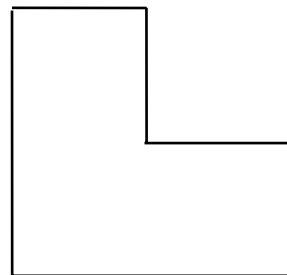
PROVA N° 8 - A.- Descobrir l'amplitud de l'angle que formen les diagonals de dos cares d'un cub



Quants graus mesuren l'angle que formen les dos diagonals de les cares del cub de la figura?

PROVA N° 8 - B.- El repartiment quadriculat

Reparteix esta figura en quatre parts idèntiques



PROVA N° 9.- A - Els 4 quatres

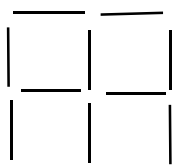
Amb 4 quatres i les quatre operacions (+, -, x, :), podries obtindre 10, 12, 15 i 16?

PROVA N° 9.- B - Amb 4 uns

Quin és el nombre més gran que es pot formar amb quatre uns?

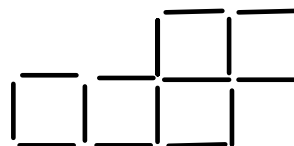
PROVA N° 10.- A - La desaparició dels 2 quadrats

Construeix amb 12 mistos esta figura:



Després, lleva dos mistos de manera que et queden només dos quadrats.

PROVA N° 10.- B - El quadrat perdut



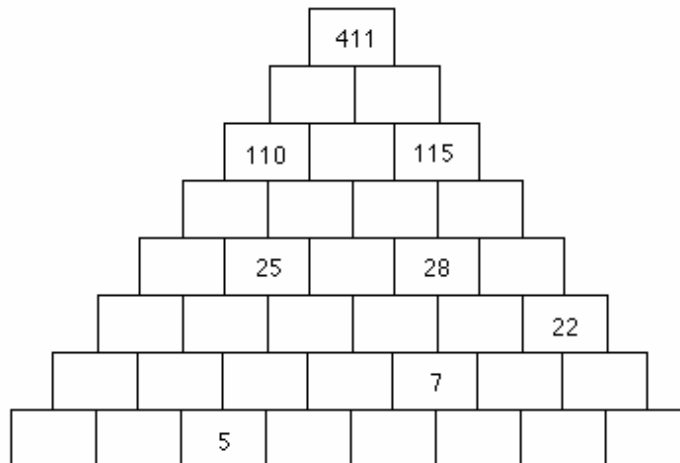
Construeix amb mistos esta figura de 5 quadrats:

Després, canvia de posició dos mistos de manera que desaparega un quadrat.

PROBLEMES NIVELL B (4RT. ESO)

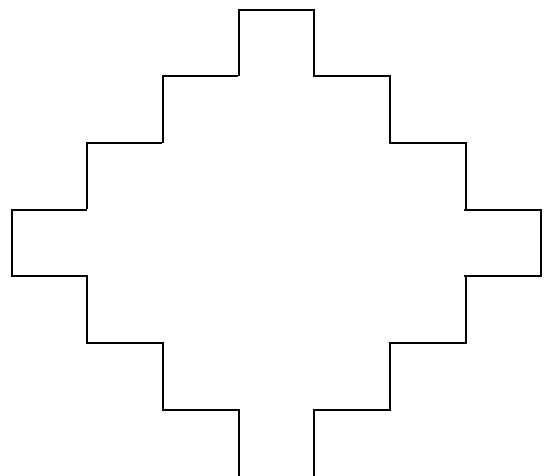
PROVA N° 1.- A - PIRÀMIDES NUMÈRIQUES

Si cada casella és la suma dels dos nombres que té baix, saps omplir la següent piràmide numèrica?



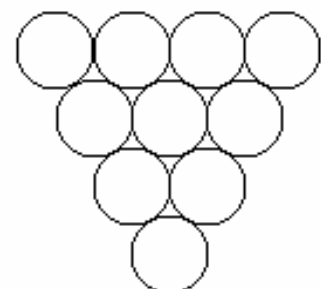
PROVA N° 1.- B - VAJA PARCEL·LA!

Una parcel·la té la forma que pots veure a la següent figura. La parcel·la té una curiosa propietat: "Si mesurem el seu perímetre en Km i la seua àrea en Km^2 , les dues mesures estan representades pel mateix nombre". Quin és, en metres, la longitud del seu perímetre?



PROVA N° 2.- A - CERCLES MÀGICS

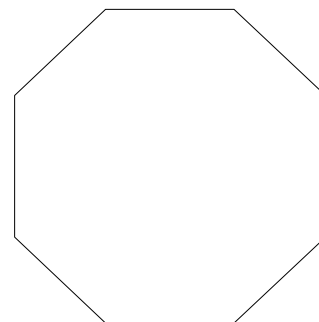
Escriu els nombres del 1 al 10 als següents cercles, de forma que cadascun dels nombres siga igual a la diferència dels dos que es troben d'alt d'ell.



PROVA N° 2.- B - OCTÒGON MÀGIC

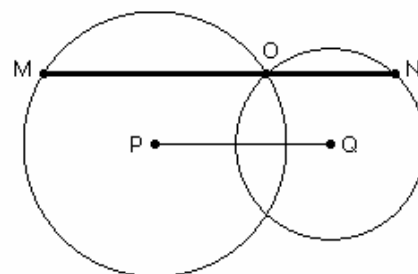
Col·loca els dígit del 1 al 8 en cada vèrtex del següent octògon, de forma que:

- els veïns del 4 sumen 9.
- els veïns del 5 sumen 11.
- els veïns del 6 sumen 10.
- els veïns del 7 sumen 8.



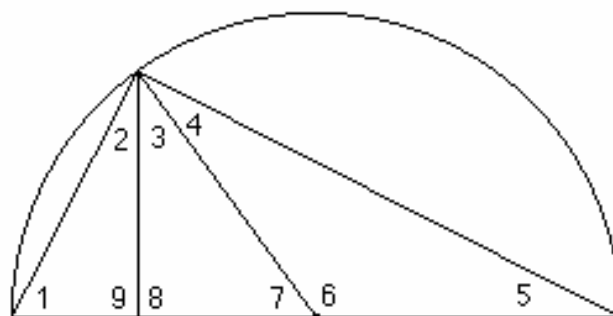
PROVA N° 3.- A - COLP D'ULL

Dues circumferències secants tenen per centres P i Q respectivament. El segment PQ mesura 3 centímetres. Per un dels punts (O) on es tallen les circumferències dibuixem una recta paral·lela al segment PQ. Siguen M i N els punts on talla eixa recta a les circumferències. Quina és la llargària del segment MN?



PROVA N° 3.- B - ANGLES

Calcula el valor de tots els angles de la figura sabent que l'angle 1 val 70° .



PROVA N° 4.- A - FILA DE NOMBRES

Si escrivim els nombres naturals seguits, de la següent forma:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 ...

quin dígit ocuparà el lloc cent mil?

PROVA N° 4.- B - TRIANGLE DE NATURALS

Disposem els nombres naturals de la següent forma:

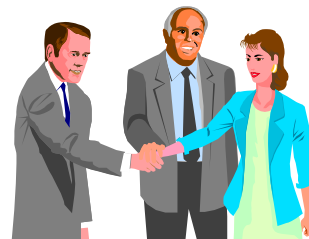
			1														fila 1
			2		3												fila 2
		4		5		6											fila 3
	7		8		9		10										fila 4
11		12		13		14		15									fila 5

Quant val la suma de tots els nombres, que ocupen la fila 25?

PROVA N° 5.- A - POLÍTICS

A una reunió del partit republicà dels Estats Units americans d'Amèrica hi havia cent polítics. Cada polític era o bé honest, o bé deshonest. Sabent que:

1. Al menys un dels polítics era honest.
2. Donat qualsevol parell de polítics, al menys un dels dos era deshonest.



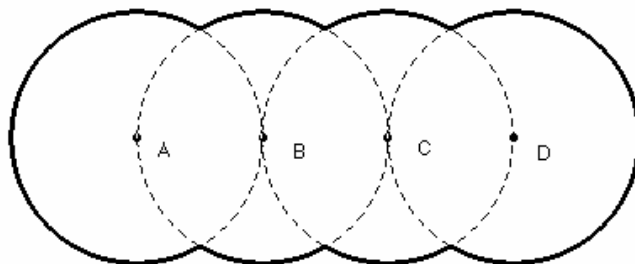
Quants polítics deshonestos hi havia?

PROVA N° 5.- B - ELS TRES AMICS

Albert, Bernat i Carles es reparteixen les seues vesprades entre estudi i cinema. Si Albert es queda estudiant, Bernat se'n va al cinema. Cada vesprada un dels dos, Albert o Carles, es queda estudiant, però no els dos. Bernat i Carles no van la mateixa vesprada al cinema. Quina persona creus que va poder anar ahir al cinema i es quedarà hui estudiant?

PROVA N° 6.- A - CERCLES

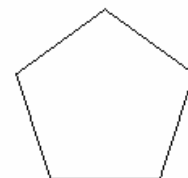
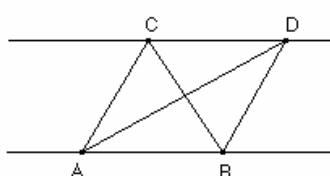
Calcula la longitud de la trajectòria curvilínia assenyalada amb traç gros continu. Els cercles tenen els seus centres als punts A, B, C i D. El diàmetre és el mateix per als quatre cercles, i



val 5 cm.

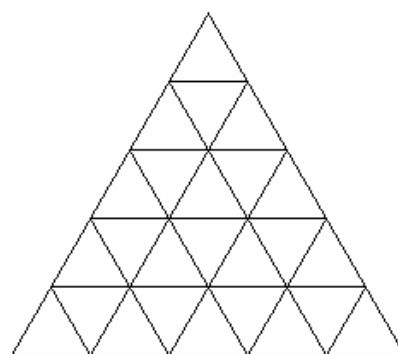
PROVA N° 6.- B - LA MATEIXA SUPERFÍCIE

Els triangles ABC i ABD tenen la mateixa superfície, ja que les seues bases i les seues alçaries son iguals. Utilitzant aquesta propietat, dibuixa un triangle que tinga la mateixa superfície que aquest pentàgon.



PROVA N° 7.- A - TRIANGLES

Quants triangles hi ha a la següent figura?

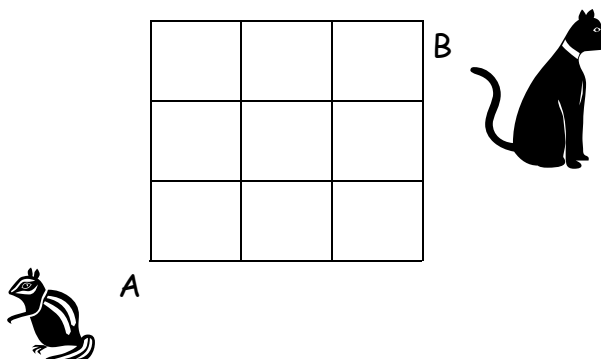


PROVA N° 7.- B - QÜESTIÓ DE SALARIS

A una empresa treballen 30 empleats i 5 directors. El salari mitjà de l'empresa és de 180.000 ptes. Quin serà el salari mitjà dels directors si sabem que el de la resta dels empleats és de 127.500 ptes.?

PROVA N° 8.- A - LA TROBADA

Les línies d'una trama quadrada representen carrers. A la següent trama inicien un passeig aleatori un gat i un ratolí. El ratolí ix del vèrtex A i el gat del B . Ambdós van a la mateixa velocitat i allunyant-se del punt d'eixida. A cada punt trien a l'atzar un dels dos camins possibles. (El ratolí cap a la dreta o amunt i el gat cap a l'esquerre o avall). Si el gat troba al ratolí se'l menja.



Es menjarà el gat al ratolí?

Es just que aposten la mateixa quantitat els que diuen que sí i els que diuen que no?

PROVA N° 8.- B - JUGANT A DETECTIUS

El jutge encarregat de resoldre el robatori en una joieria sap que dels tres sospitosos que han capturat un menteix, dos diuen la veritat i els tres coneixen al lladre. Per tant, el jutge decideix fer-los la mateixa pregunta als tres. Qui va cometre el robatori?

Les respostes que donaren els tres sospitosos foren:

Enric: Ha sigut Pep.

Pep: Ha sigut Enric.

Lluïsa: No ha sigut Pep.

Després d'escoltar les respostes, el jutge va condemnar al culpable. Saps dir qui va ser?

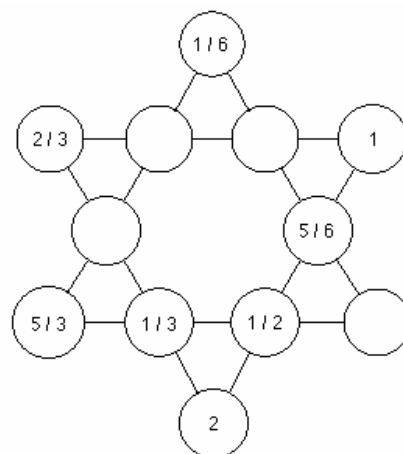
PROVA N° 9.- A - NUMERIGRAMA

Completa les següents caselles buides sabent que únicament es pot utilitzar les xifres del 1 al 9, una a cada casella.

$$\begin{array}{rcccl}
 \boxed{} & - & \boxed{} & = & \boxed{} \\
 & & & & \times \\
 \boxed{} & \div & \boxed{3} & = & \boxed{} \\
 & & & & = \\
 \boxed{} & + & \boxed{} & = & \boxed{}
 \end{array}$$

PROVA Nº 9.- B - ESTEL MÀGIC

Completa el següent estel màgic (la suma de les fraccions en cada línia és constant):

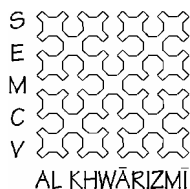

PROVA Nº 10.- A - VIATGE DE VACANCES

Un grup de turistes participa en un viatge de vacances. Disposen d'una mitjana de 816 € per a despeses en regals. Si sabem que, per terme mig, els homes tenen 764 € i les dones 855 €, quina proporció d'homes i dones hi ha en aquest grup de turistes?.

PROVA Nº 10.- B - TRAJECTE FERROVIARI

Estem estudiant el trajecte ferroviari València - Sevilla. El tren exprés ix de València diàriament a les 21'00 hores i fa el recorregut a una velocitat mitjana de 60 km/h. El tren TALGO ix de València a las 23'00 hores i recorre el trajecte a una velocitat mitjana de 90 km/h.

En quin punt i en quin moment aproximat el TALGO alcança l'exprés?.



XII OLIMPIADA MATEMÀTICA
PROVINCIA DE VALÈNCIA - FASE PROVINCIAL
5 DE MAIG DE 2001 - PROVA INDIVIDUAL

PROBLEMES NIVELL A (2on. ESO)

1.- DAVID I GOLIAT

Goliat (el de David i Goliat, els personatges de la Bíblia), tenia una altura de "sis colzes i un pam". Un pam era la distància entre els extrems del polze i del menovell quan la ma està totalment estesa, aproximadament 9 polzades. Un colze era la distancia entre el colze d'una persona i l'extrem del seu dit medi quan la persona tenia el braç estès. Per tant, la mesura depenia de la persona, encara que les estimacions indiquen que estava entre 17 i 22 polzades.

Entre quins valors es podria trobar l'alçada de Goliat, en peus i polzades?

I en centímetres?

1 colze = entre 17 i 22 polzades.
1 peu = 12 polzades.
1 pam = 9 polzades.
1 polzada = 2.54 cm.

2.- DUPLICAR UN QUADRAT

Duplicar un cub va ser un dels problemes amb que es van escalfar el cap els matemàtics grecs.

a.- Et proposem duplicar un quadrat. Com podem dibuixar un altre quadrat l'àrea del qual siga el doble?

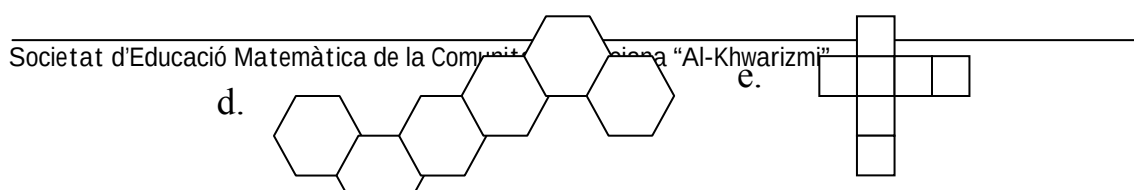
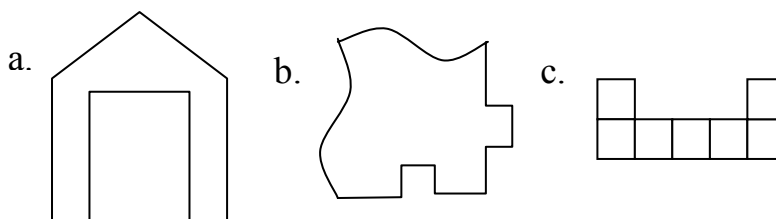
b.- A partir d'un quadrat, com podem dibuixar un altre que tinga el triple d'àrea?

3.- ELS QUATRE APARELLS

A una classe, al menys el 85% dels estudiants té televisió; al menys el 75% té vídeo; al menys el 80%, un aparell de música; al menys el 70%, un ordinador. Quants tenen al menys els quatre aparells anteriors?.

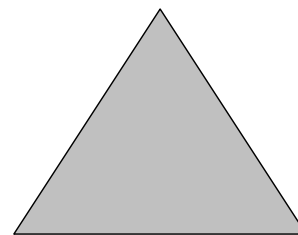
4.- RECOBRIR EL PLA

Determina per a cadascuna de les següents figures si poden usar-se per a recobrir el pla mitjançant translacions i girs de 180° .



5.- ACCIDENT NUCLEAR

En una central nuclear es va produir un escapament de material radiactiu que ha contaminat un terreny que té forma de triangle equilàter d'un quilòmetre de costat. Com a mesura de seguretat, s'ha declarat inhabitable la superfície que estiga fins a un quilòmetre de distància de la zona contaminada.



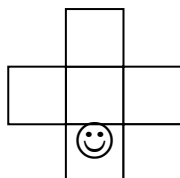
Si incloem la zona contaminada, quina serà la superfície que quedarà deshabitada en total?

6.- MALA CARA

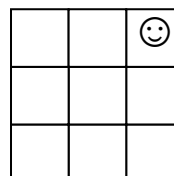
Es tracta d'un joc en el que participen dos jugadors que, en el seu torn, poden tatxar qualsevol número de quadrats de la quadrícula sempre que formen un rectangle. Perd el jugador que no li queda més remei que tatxar el quadre que conté la cara.

Si tu comences, com jugaràs en cadascuna de les següents quadrícules (són distintes les partides A i B) per a estar segur de que vas a guanyar?

A.-



B.-

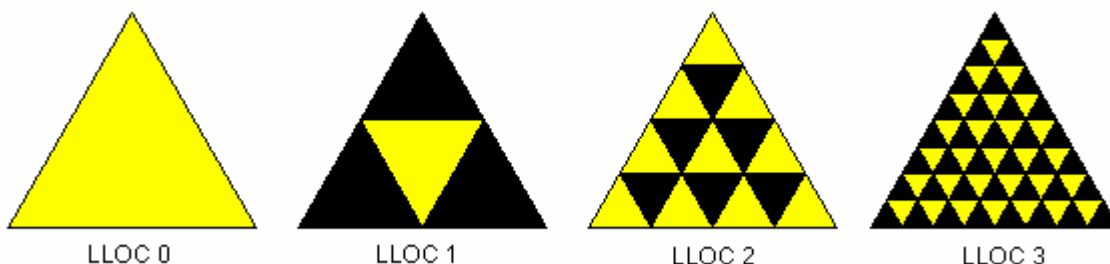


NOTA.- Recorda que els quadrats també són rectangles.

PROBLEMES NIVELL B (4RT. ESO)

1.- BLANC I NEGRE

Les següents figures estan formades per triangles equilàters. A l'interior de cada triangle blanc afegim tres triangles equilàters negres. A l'interior de cada triangle negre afegim tres triangles equilàters blancs. I així repetim el procés successivament.



- Quina és l'àrea blanca i l'àrea negra de la figura que està al lloc 5?
- Quina és l'àrea blanca i l'àrea negra de la figura que està al lloc 20?
- Escriu fórmules que expressen l'àrea blanca i l'àrea negra de la figura que està al lloc n . Creus que les àrees blanca i negra arribaran a ser iguals?

2.- LLOGUER DE COTXES

Volem llogar un cotxe durant una setmana (7 dies). Disposem de l'oferta de preus de tres empreses:

AUTOVIATJES	LLOGUIMÒVIL	RENTACAR
11900 ptes. per setmana, sense límit de quilòmetres	1000 ptes. per dia més 6'5 ptes. per km.	6000 ptes. per setmana, 500 km. sense cost, més 22 ptes. per km després dels primers 500

Quina de les empreses ens convé elegir?

3.- TAULER

De quantes formes podem col·locar sis fitxes en un tauler 6×6 de forma que cada fila i columna tinga únicament una fitxa?

	1	2	3	4	5	6
1	●					
2			●			
3		●				
4				●		
5						●
6					●	

Si numerem les caselles del 1 al 36, d'esquerra a dreta i de dalt a baix, i sumem el nombre corresponent a les caselles ocupades en cadascuna de les col·locacions anteriors, obtenim sempre la mateixa suma? En cas afirmatiu, quin és el valor d'eixa suma?

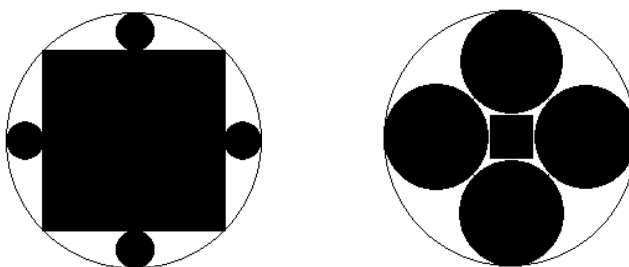
4.- DIAGNÒSTIC FIABLE?

Una prova determinada serveix per a diagnosticar la SIDA. Si s'està malalt, la prova és positiva amb un 97% de seguretat. Si no es té la malaltia, la prova és negativa amb un 93% de seguretat. Certa persona es fa la prova i sabem, pel grup de població al que pertany, que una de cada 100 persones d'eixe grup està malalta sense saber-ho.

- Quina és la probabilitat de que la prova resulte positiva?
- Si el resultat es positiu, quina és la probabilitat de que tinga la SIDA realment?
- Si la prova té resultat negatiu, quina és la probabilitat de que, malgrat això, tinga la SIDA?
- Aquesta prova és millor per a descartar la malaltia que per a confirmar-la? Pot ser que hi haja un grup de població per al que, amb aquesta prova, la probabilitat obtinguda en c) siga major que la obtinguda en b)?

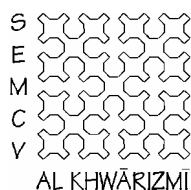
5.- TORRONS

Un fabricant de torrons decideix embalar els seus productes en caixes amb forma circular de 10 cm. de radi, introduint dins de cada caixa quatre barres circulars de torró i una quadrada. Pot fer-ho de dos formes diferents, tal com indiquen les següents figures. Quin dels dos models presenta més quantitat de torró? Calcula l'àrea de la secció recta (o siga, del tall transversal) ocupada pel torró en cada cas. Si el preu dels dos models és el mateix, quin creus que serà el model elegit pel fabricant?



6.- NOMBRE CAP-I-CUA

Joan pensa un nombre i dona pistes a Maria per a que l'endivine. Joan li diu a Maria: "el nombre que he pensat té quatre xifres i és cap-i-cua. La suma de les seues xifres és 16. Si canvie les xifres de les unitats amb la de les desenes i, la de les centenes amb la dels milers, el nombre continua sent cap-i-cua i la suma continua valent 16; però la diferència entre el nombre i el pensat és 5346". Pots ajudar a Maria a trobar el nombre pensat per Joan?



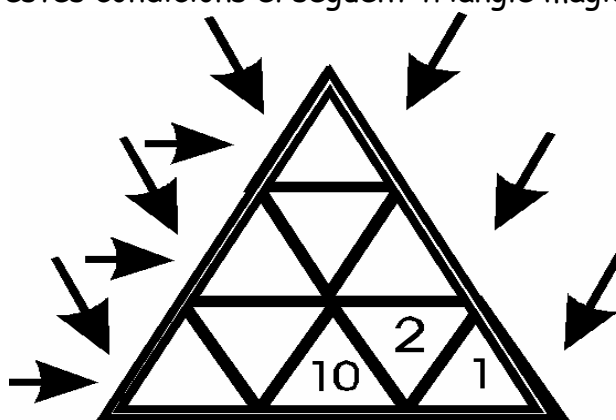
XII OLIMPIADA MATEMÀTICA
PROVINCIA DE VALÈNCIA - FASE PROVINCIAL
5 DE MAIG DE 2001 - PROVA PER EQUIPS - VELOCITAT

PROBLEMES NIVELL A (2on. ESO)

PROVA Nº 1.- TRIANGLE MÀGIC

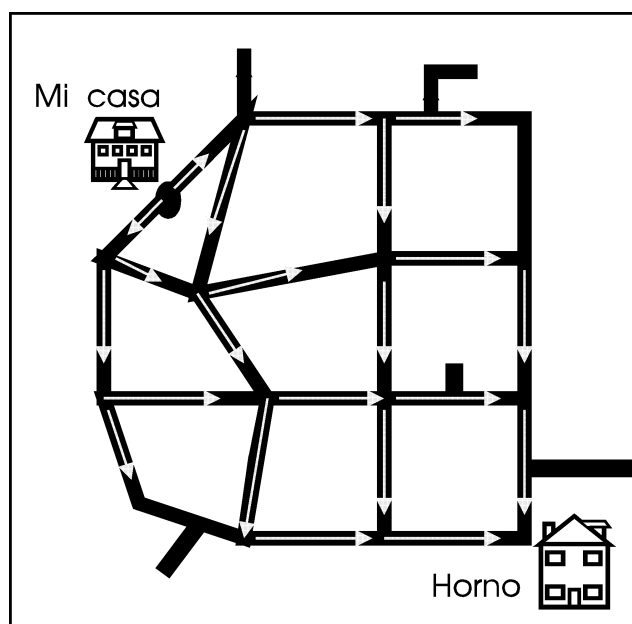
Si sumem els nombres del triangle en el sentit que indiquen les fletxes, sempre obtenim el mateix resultat, observa que les sumes consten d'un nombre no constant de sumands.

Completa amb estes condicions el següent triangle màgic.



PROVA Nº 2.- DE CASA AL FORN

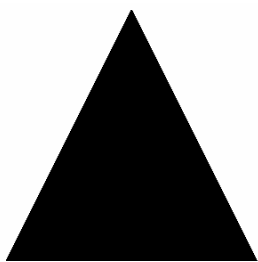
De quantes maneres puc anar de ma casa al forn?. Teniu en compte que has de respectar el sentit de les fletxes.



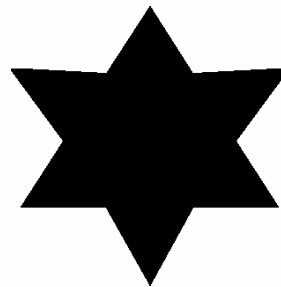
PROVA N° 3.- L'ILLA DE KOCH

En el mar de fractal el pobre koch té una illa volcànica al voltant de la qual vol construir un encerclat. El problema de Koch és el següent: L'illa canvia de forma cada any amb el que cada any ha de canviar l'encerclat. Observa l'evolució: cada any en cada costat de l'illa (que és en principi un triangle equilàter de costat 729 m.) es forma un nou triangle equilàter el costat del qual és un terç del costat a què es va adossar. Contesta: Quant mesura el perímetre de l'illa l'any cinc?

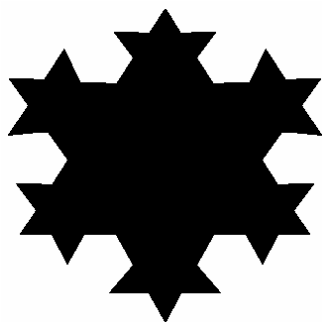
Any zero



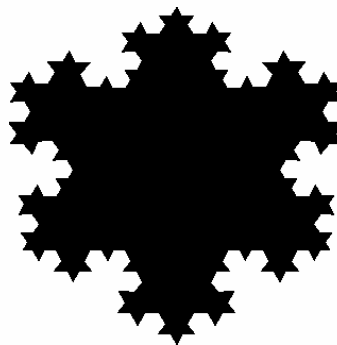
Any u



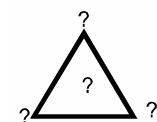
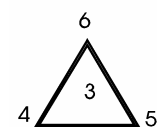
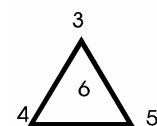
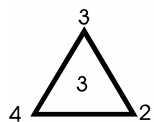
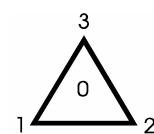
Any dos



Any tres

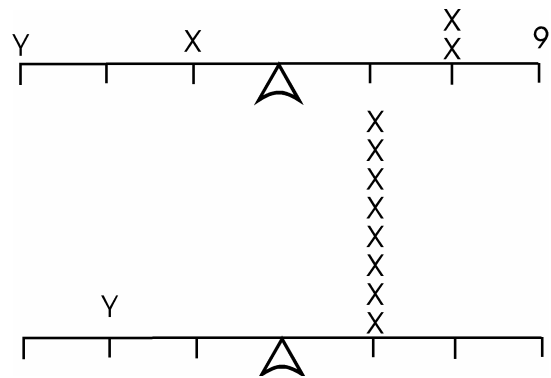


PROVA N° 4.- QUIN NOMBRE FALTA?



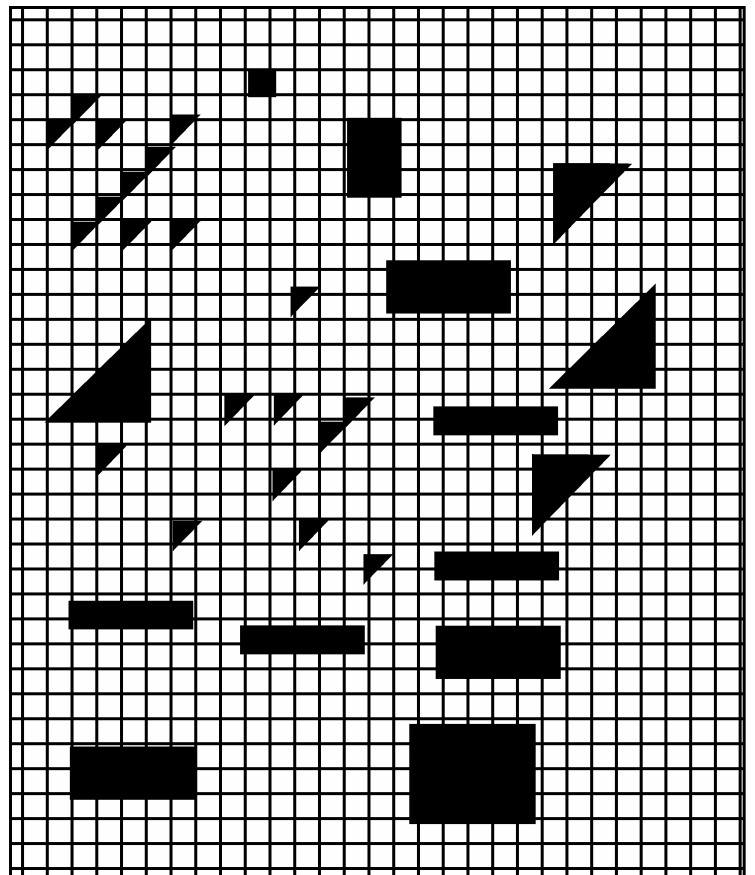
PROVA Nº 5.- LLETRES EN LA BÀSCULA

Els balancins del dibuix estan en equilibri, esbrina quin és el pes de cada lletra:



PROVA Nº 6.- QUADRAT A TROÇOS

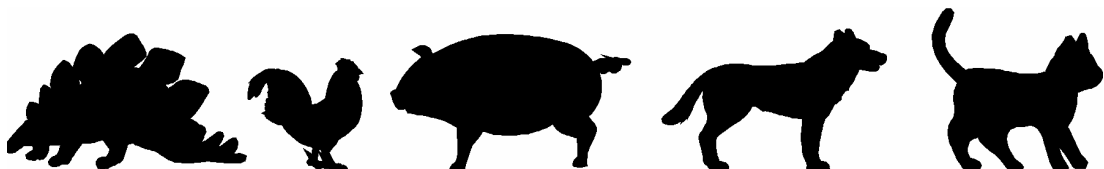
S'ha dividit un quadrat en molts trossos, de manera que els costats perpendiculars de qualsevol figura mesuren un nombre enter de quadrets.



Quant mesurava el costat del quadrat original?

PROVA Nº 7.- JUAN, PEDRO I LUIS

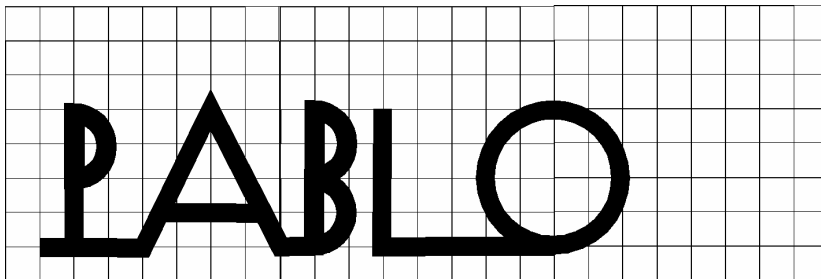
Esbrina quina mascota té cada u dels amics anteriors.



- Juan i Pedro no tenen la mateixa mascota.
- Luis és un mentirós.
- Hi ha mes gossos que gats.
- Luis va dir: " La meua mascota és diferent de la de Juan".

PROVA N° 8.- QUAN MESURA EL NOM DEL MEU FILL?

El que et pregunte és quant mesura la línia que s'ha utilitzat per a escriure'l. Teniu en compte que no es passa dos vegades per la mateixa línia i que les corbes són cercles o semicercles:

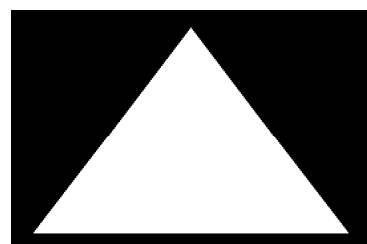


PROVA N° 9.- QUIN ÉS EL SEGÜENT?

1	3	8	19	42	85	?
---	---	---	----	----	----	---

PROVA N° 10.- TANGRAM

Amb les peces del tangram construeix la següent figura:



Dibuixa l'esquema de com col·locar cada peça.

PROBLEMES NIVELL B (4RT. ESO)

PROVA N° 1.- TRENCACLOSQUES NUMÈRIC

Col·loca una xifra en cada casella.

Horitzontals

- Últim any del segle XX
- Solució de l'equació $X+15=37$. Múltiple de 7
- Mitja desena. Valor numèric del polinomi $2x^3 - x - 3$ per a $x=5$
- Valor de $1 - x^3$ per a $x=-3$ Element neutre.
- Any de l'última visita visita del cometa Halley

Verticals

1. El cub de 5. Element neutre.
2. Solució de l'equació $\frac{X+8}{5} = 20$. Primer número primer major que 25.
3. Solució de l'equació $\frac{X-1}{4} - \frac{X-2}{7} = 1$. Quadrats de 17 menys 1.
4. Solució de l'equació $\frac{X}{2} - 7 = 450$. En números romans es VI.
6. El 15 % de 2800.

PROVA Nº 2.- ENDEVINA

Endevina un nombre de sis xifres , si et donen les següents pistes:

1. Les sis xifres són distintes .
2. Les dos primeres sumen 4.
3. Les dos últimes sumen 9.
4. La segona xifra és la més xicoteta.
5. La xifra més gran és la quinta.
6. La primera i l'última xifra es diferencien en una unitat.
7. La tercera xifra és un 2
8. Totes les xifres juntes sumen 16.

PROVA N° 3.- EL TALL ECONÒMIC

Emma buscava un retall de 3 metres de costat, per a una taula quadrada. Però només va poder trobar un retall rectangular de 5x2 metres. Tenia prou tela, però va haver d'enginyarse-les per a només amb tres talls rectes formar cinc peces que encaixaven perfectament a manera de puzzle. (Un motiu geomètric formant un quadrat i sense perdre res de material). Explica esquemàticament com ho va fer.

PROVA N° 4.- ELS PALS DEL BARCO

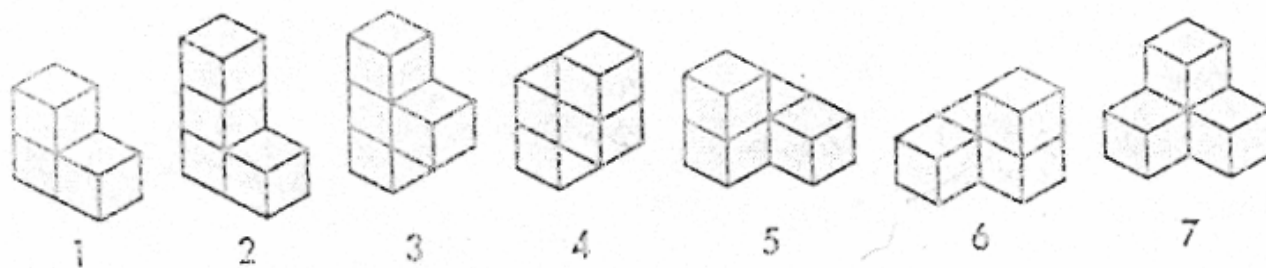
Dos pals d'un barco mesuren 6 i 4 metres, respectivament. S'han estès uns cables d'acer que van des de l'extrem de cada pal al peu de l'altre, encreuant-se a una altura de 2,4 m del sòl. Quina separació hi ha entre els pals?

PROVA N° 5.- ANGLES EN EL RELLOTGE

Quin angle formen les manetes d'un rellotge a les 3 h. 12 min.?

PROVA N° 6.- EL SOMA

Formant amb polícubos les següents figures, pots aconseguir les peces necessàries per a muntar amb eixe trencaclosques el cub SOMA .



PROVA N° 7.- ARITMÈTICOGRAMES

Esbrina el valor de x , i , z .

X	+	I	+	Z	=	20
+		+		+		
Z	-	Z	+	X	=	3
-		-		+		
I	-	2	-	X	=	5
=		=		=		
0		15		13		

PROVA N° 8.- ASSIGNATURES OPTATIVES

Ana ha de matricular-se en l'Institut. El seu curs consta de tres assignatures obligatòries (Matemàtiques, Física i Biologia) i dos assignatures optatives a elegir entre les següents:

Informàtica (I), Esports (D), Música (M),
Religió (R), Química (Q) Tecnologia (T)

1. Escribe todas las posibles elecciones que puede hacer Ana.
2. ¿Cuál es la probabilidad que las asignaturas elegidas sigan 1 i D?
3. ¿I que una de las asignaturas siga Q?

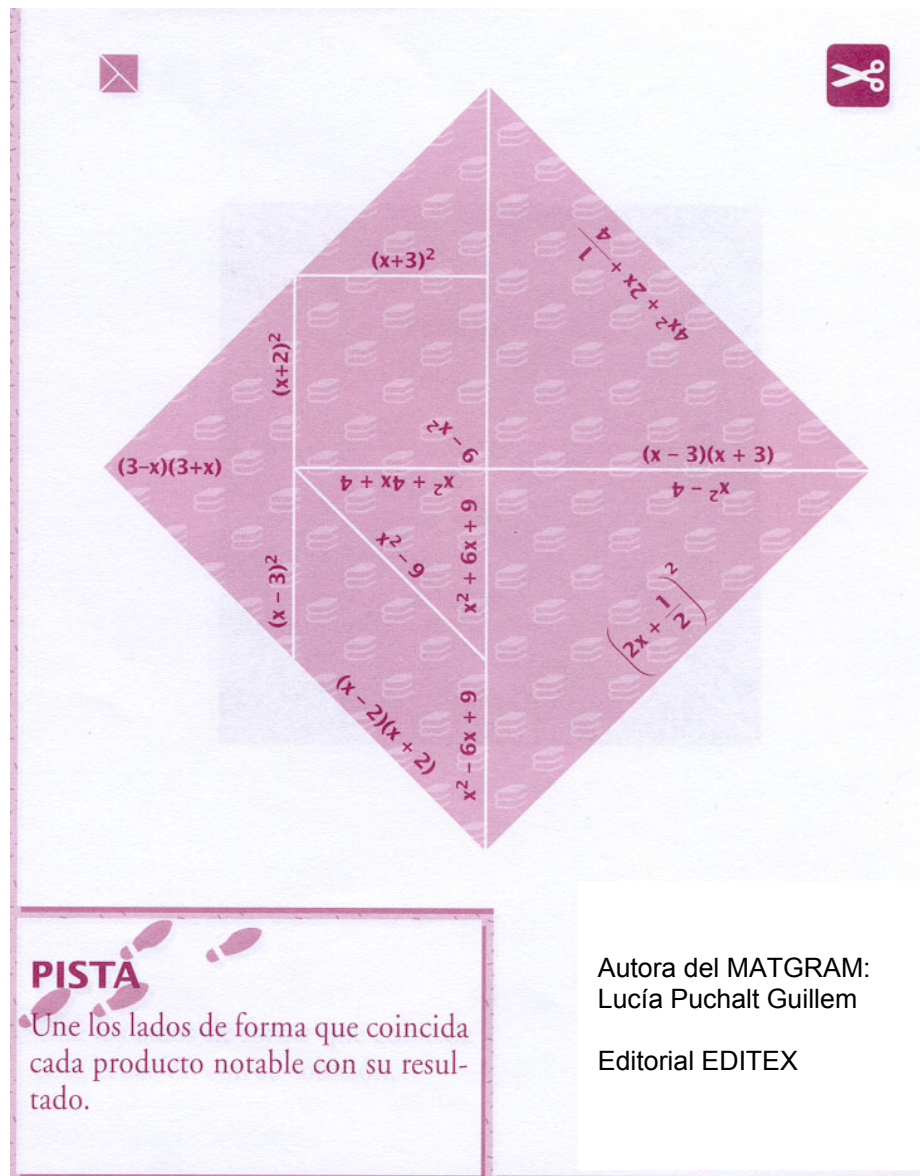
PROVA N° 9.- NOMBRES XINESOS

Responde a estas preguntas en una tabla de números chinos:

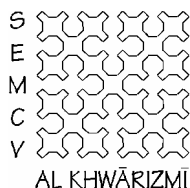
1. Escribe el símbolo que representa el 10. _____
2. ¿Cuál es el símbolo del 5? _____
3. Escribe el símbolo del 15 _____
4. ¿I el 35? _____
5. Omple els cinc buits que falten en el quadrat.
6. Dibuixa el signe que representa el número 130

一	十	二十	三十	四十	五十	六十	七十		九十
二	十一	二十一	三十一	四十一	五十一	六十一	七十一	八十一	九十一
三		十二	三十二	四十二	五十二	六十二	七十二	八十二	九十二
四	十四	二十四	三十四	四十四	五十四	六十四	七十四	八十四	九十四
五	十五	二十五	三十五	四十五	五十五	六十五	七十五	八十五	九十五
六	十六		三十六	四十六	五十六	六十六	七十六	八十六	九十六
七	十七	二十七	三十七	四十七	五十七	六十七	七十七	八十七	九十七
八	十八	二十八	三十八	四十八	五十八	六十八	七十八	八十八	九十八
九	十九	二十九	三十九	四十九	五十九	六十九	七十九	八十九	
十	二十	三十		五十	六十	七十	八十	九十	百

PROVA N° 10.- MATGRAM



SOLUCIONS

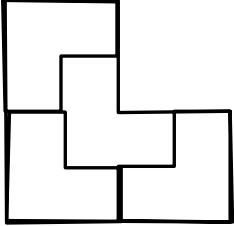
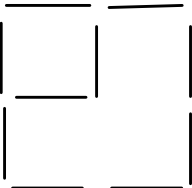
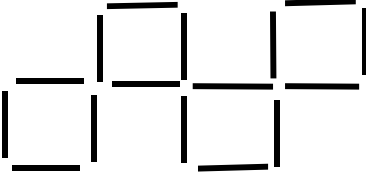


XII OLIMPIADA MATEMÀTICA
PROVINCIA DE VALÈNCIA - FASE PROVINCIAL
5 DE MAIG DE 2001

PROVA PER EQUIPS - RELLEUS - SOLUCIONS

PROBLEMES NIVELL A (2on. ESO)

PROVA NÚM. 1 - A Els personatges són: una néta (Clara), una filla (Gema), sa mare (Laura) i una iaia (Juana, que és la mare de Laura i iaia de Gema). Dels 25 llibres que la mare (Laura) va rebre de la iaia (Juana), va separar 7 per a donar-li'ls a la seua filla (Gema).	PROVA NÚM. 1 - B Hui és 1 de gener, i el seu aniversari va ser ahir, dia 31 de desembre. Despús-ahir tenia 12 anys, ahir va fer 13. Enguany farà 14. L'any que ve 15.
PROVA NÚM. 2 - A 22 caramels en la primera bossa, 14 en la segona i 12 en la tercera.	PROVA NÚM. 2 - B 8 germans i 5 germanes.
PROVA NÚM. 3 - A És l'única forma geomètrica que impedeix que la tapa pugui entrar en el forat.	PROVA NÚM. 3 - B 11 segons, ja que els intervals entre campanades són d'1 s.
PROVA NÚM. 4 - A Mireia balla amb el xic que porta el núm. 15	PROVA NÚM. 4 - B 5, perquè les pàgines 111 i 112 són ambdós cares d'un mateix full.
PROVA NÚM. 5 - A Si un pastís pesa 2 kg. més que el pes de mig pastís, vol dir que pesa 6 Kg., perquè $1/2 \text{ pastís} + 2 \text{ Kg.} = 1 \text{ pastís}$. Açò vol dir que $1/2 \text{ pastís}$ pesa 2 Kg. Després el pes d'un pastís i mig, és a dir, de 3 mitjos pastissos serà 6 kg. ($2 \times 3 = 6$).	PROVA NÚM. 5 - B Posem 2 filets en la paella i els vam fregir per 1 cara. Ha passat 1 minut. Vam reservar un dels filets i li donem la volta a què queda mentre posem el tercer filet. Passa 1 minut més i ja tenim un filet fet per les dos cares, que vam substituir pel

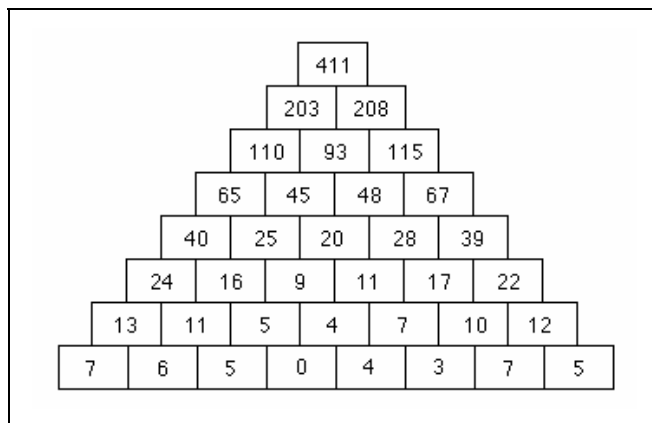
	que havíem reservat i que, al seu torn, posem pel costat que li faltava. També li donem la volta a què hi havia en la paella. Hem guanyat 1 minut i hem fregit els 3 filets en 3 minuts.
PROVA NÚM. 6 - A 100	PROVA NÚM. 6 - B Als 60 anys (Solució de l'equació $x/4 + x/5 + x/3 = x$)
PROVA NÚM. 7 - A Costat = $2\sqrt{2}cm$. Perímetre = $8\sqrt{2}cm$.	PROVA NÚM. 7 - B Els triangles AMD, ANM i ABN tenen la mateixa àrea, per què tienen la mateixa altura ($d(A, DB)$) i iguals bases ($DM = MN = NB$). Així, cadascun és la tercera part de l'àrea del triangle ABD Àrea (MAN) = $1/3$ Àrea (ABD) = $1/6 (8 \times 3) = 4 cm^2$
PROVA NÚM. 8 - A L'angle és igual a 60°. Si es dibuixa la diagonal de la tercera cara del cub es pot observar que es forma un triangle equilàter.	PROVA NÚM. 8 - B 
PROVA NÚM. 9 - A $\frac{44-4}{4} = 10 \quad \frac{44}{4} + 4 = 15 \quad \frac{44+4}{4} = 12$ $4 + 4 + 4 + 4 = 16$	PROVA NÚM. 9 - B $11^{11} = 2,853116706 \times 10^{11}$
PROVA NÚM. 10 - A 	PROVA NÚM. 10 - B 

PROBLEMES NIVELL B (4rt. ESO)

PROVA N° 1.- A. PIRÀMIDES NUMÈRIQUES

La solució és la següent:

DIFICULTAT: 40



PROVA N° 1.- B. VAJA PRACEL·LA!

Si anomenem L a la longitud del costat del quadrat en Km, tenim la següent igualtat:
 $28 \cdot L = 25 \cdot L^2$. Per tant, resolent aquesta equació de segon grau:

$$L \cdot (25 \cdot L - 28) = 0 \rightarrow \begin{cases} L = 0 \rightarrow \text{No és possible} \\ 25 \cdot L - 28 = 0 \rightarrow L = 28/25 = 1,12 \text{ Km} \end{cases}$$

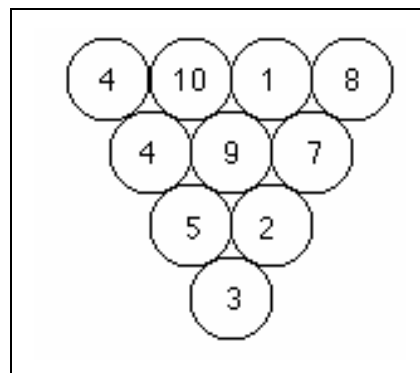
Per tant, el perímetre de la parcel·la és: $P = 28 \times 1,12 \text{ Km} = 31,36 \text{ Km} = 31360 \text{ metres}$.

DIFICULTAT: 20

PROVA N° 2.- A. CERCLES MÀGICS

La solució és la següent:

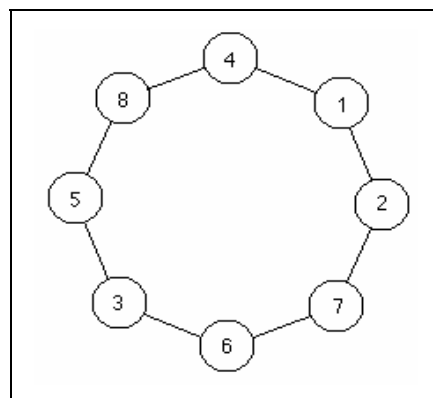
DIFICULTAT: 30



PROVA N° 2.- B. OCTÓGON MÀGIC

La solució és la següent:

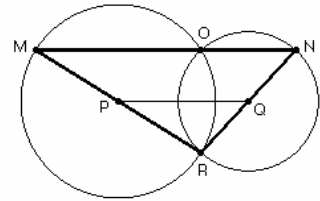
DIFICULTAT: 30



PROVA N° 3.- A. COLP D'ULL

Si unim els punts M i N amb el altre punt d'intersecció de les dues circumferències, obtenim el triangle MNR . Els punts P i Q son punts mitjans dels costats MR i NR , ja que aquestos son diàmetres, mentre que P i Q son centres de

les circumferències. Això vol dir que PQ és la paral·lela mitjana del triangle MNR. Per tant, PQ és la meitat del costat MN. És a dir, MN és dues vegades el segment PQ. Aleshores, $MN = 2 \cdot PQ = 6 \text{ cm}$.



PROVA N° 3.- B. ANGLES

L'angle 2 mesura 20° . Per ser el triangle isòsceles (dos costats són radis) els angles 4 i 5 són iguals. La suma dels angles 2, 3 i 4 és 90° , perquè l'angle total abarca el diàmetre. D'estes dues condicions, s'obté que la suma dels angles 2 i 4 és igual a l'angle 7, i l'angle 7 és igual a dues voltes l'angle 4, d'on l'angle 2 és la meitat de l'angle 7. Per tant, l'angle 7 mesura 40° , els angles 4 i 5 mesuren 20° , l'angle 6 mesura 140° , l'angle 3 mesura 50° i els angles 8 i 9 són rectes.

Angle:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Mesura:	70°	20°	50°	20°	20°	140°	40°	90°	90°

DIFICULTAT: 30

PROVA N° 4.- A. FILA DE NOMBRES

Anem a contar el número de llocs que ocupa cada número segons el número de xifres que continga, pel que omplint la següent taula, obtenim:

N° de xifres	Números amb eixe n° de xifres	Llocs que ocupen	Acumulat
1	9	9	9
2	90	180	189
3	900	2700	2889
4	9000	36000	38889
5	90000	450000	488889

Com veiem, fins al 9999 (últim número amb 4 xifres) hem ocupat un total de 38889 llocs. Significa que fins al lloc 100000 queden 61111 llocs. Com corresponen a números amb 5 xifres, si dividim 61110 entre 5 tindrem quants números de 5 xifres hi ha abans el lloc 61111, que farà el lloc 100000 del total. El resultat és que cal contar 12222 números a partir del 9999, i obtenim 22221. Això implica que el lloc 99999 està ocupat pel número 1. Aleshores el lloc 100000 vindrà ocupat pel número 2, que serà la primera xifra del número 22222. Per tant, la solució és el 2.

DIFICULTAT: 30

PROVA N° 4.- B. TRIANGLE DE NATURALS

Observant casos particulars:

FILA	SUMA	PROCEDIMENT
1	1	1
2	2+3	$(1+2+3)-1$
3	4+5+6	$(1+2+3+4+5+6)-(1+2+3)$
4	7+8+9+10	$(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10)-(1+2+3+4+5+6)$

Per exemple, per a obtenir la suma de la quarta fila, en primer lloc sumem els nombres d'ordre de totes les files fins a la 4ª i fins a la 3ª, és a dir, calculem: $1+2+3+4=10$ i $1+2+3=6$. Aleshores el primer parèntesi és la suma de tots els naturals des de 1 fins a 10 i el segon parèntesi és la suma des de 1 fins a 6. És a dir, la suma dels elements de la 4ª fila és:

$$(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10)-(1+2+3+4+5+6)=7+8+9+10=34$$

Això vol dir que per a obtenir la suma de la fila 25 hem de trobar primer les sumes:

$$1+2+3+4+5+\dots+21+22+23+24+25=\frac{1+25}{2}\cdot 25=13\cdot 25=325 \quad \text{i}$$

$1+2+3+4+5+\dots+20+21+22+23+24=325-25=300$. Per tant, els últims elements de les dos sumes són 325 i 300. Aleshores, la suma dels elements de la fila 25 és:

$$\begin{aligned} S_{25} &= (1+2+3+\dots+323+324+325)-(1+2+3+\dots+298+299+300)= \\ &= \frac{1+325}{2}\cdot 325 - \frac{1+300}{2}\cdot 300 = \frac{326}{2}\cdot 325 - 301\cdot \frac{300}{2} = 163\cdot 325 - 301\cdot 150 = 7825 \end{aligned}$$

En general, per a trobar la suma dels elements situats a la fila n , calculem en primer lloc les sumes:

$$1+2+3+\dots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2} \quad \text{i} \quad 1+2+3+\dots+(n-1)=\frac{n\cdot(n-1)}{2}. \quad \text{Aleshores, la suma dels elements de la fila } n \text{ és:}$$

$$S_n = \left(1+2+3+\dots+\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right) - \left(1+2+3+\dots+\frac{n\cdot(n-1)}{2}\right) = \frac{n\cdot(n^2+1)}{2}.$$

DIFICULTAT: 30.

PROVA N° 5.- A. POLÍTICS

Per la condició (1) sabem que n'hi ha al menys un polític honest. Triem al polític honest. D'altra banda, per la condició (2), donat qualsevol parell de polítics, al menys un dels dos és deshonest. Per tant, si ajuntem el polític honest triat amb cadascun dels 99 restants, cadascun d'ells és deshonest. Per tant, n'hi ha 99 polítics deshonestos.

DIFICULTAT: 20

PROVA N° 5.- B. ELS TRES AMICS

Per les condicions del problema, Albert se'n va al cinema totes les vesprades, ja que si una vesprada es queda a estudiar, Bernat té que anar-se al cinema i Carles te que quedar-se a estudiar. Però Albert i Carles no poden quedar-se a estudiar ambdues. Absurde!. Això vol dir que Albert se'n va sempre al cinema, i per tant, Carles es queda sempre a estudiar. L'únic que pot anar ahir al cinema i quedar-se hui estudiant és Bernat. DIFICULTAT: 40

PROVA N° 6.- A. CERCLES

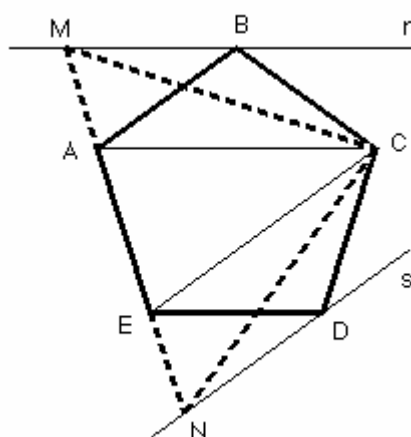
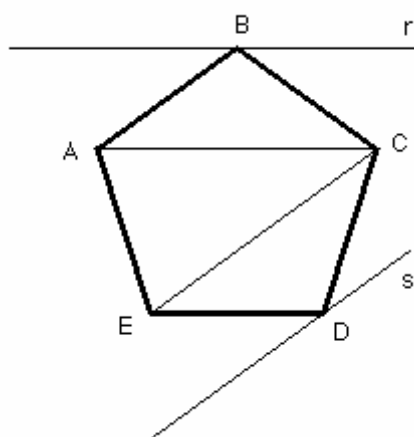
La trajectòria curvilínia assenyalada (o siga, el perímetre de la figura) és igual exactament a la longitud de dos circumferències, perquè cadascun dels quatre arcs és igual a la sexta part de la circumferència. Per tant, la longitud de la trajectòria és:

$$L = 2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot R = 4 \cdot \pi \cdot \frac{5}{2} = 10 \cdot \pi \approx 31.4 \text{ cm.}$$

DIFICULTAT: 20

PROVA N° 6.- B. LA MATEIXA SUPERFÍCIE

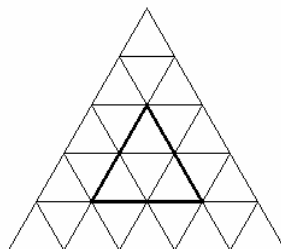
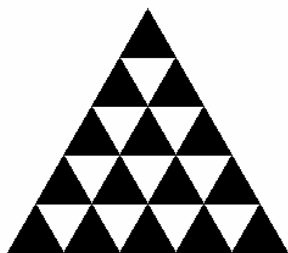
Dibuixem la diagonal AC i per el vèrtex B una paral·lela r a AC. Dibuixem la diagonal EC i per el vèrtex D una paral·lela s a EC. D'aquesta forma el pentàgon queda dividit en tres triangles ABC, ACE i ECD. Es tracta ara de dibuixar altres dos triangles que tinguen la mateixa superfície que els triangles ABC i ECD.


PROVA N° 7.- A. TRIANGLES

Contem primer els triangles amb un vèrtex cap a dalt:

De costat 1 n'hi ha $1+2+3+4+5=15$.

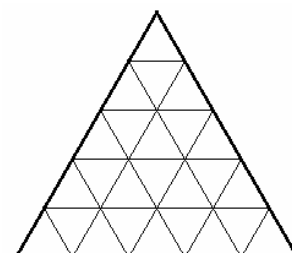
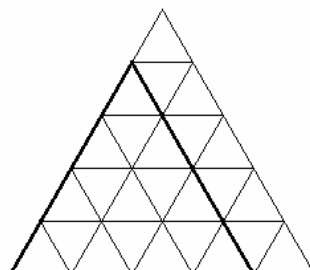
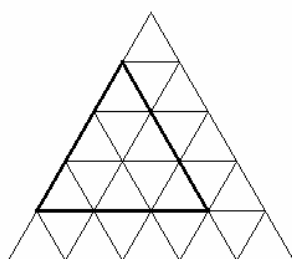
De costat 2 n'hi ha $1+2+3+4=10$.



De costat 3 n'hi ha $1+2+3=6$

De costat 4 n'hi ha $1+2=3$

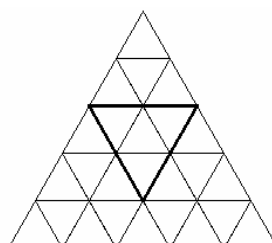
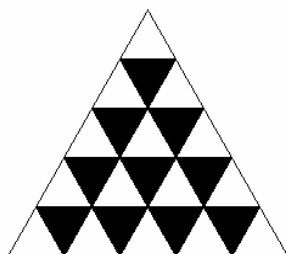
De costat 5 n'hi ha 1



Per tant, n'hi ha $1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 35$ triangles amb un vèrtex cap a dalt. Contem ara el triangles que tenen un vèrtex cap a baix:

De costat 1 n'hi ha $1+2+3+4=10$

De costat 2 n'hi ha $1+2=3$



Per tant, n'hi ha $3 + 10 = 13$ triangles amb un vèrtex cap a baix. Finalment, n'hi ha $35 + 13 = 48$ triangles en total.

DIFICULTAT: 20

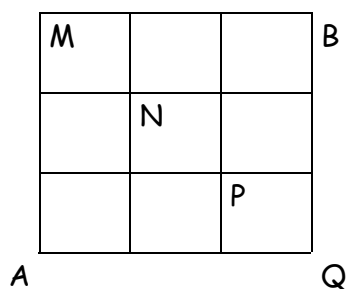
PROVA N° 7.- B. QÜESTIÓ DE SALARIS

Siga x el salari mitjà dels directors. Aleshores es compleix:

$$\frac{30 \cdot 127500 + 5 \cdot x}{35} = 180000 \rightarrow 3825000 + 5 \cdot x = 6300000 \rightarrow 5 \cdot x = 2475000.$$

Per tant: $x=495000$. És a dir, el salari mitjà dels directors és de 495000 pts.

DIFICULTAT: 10

PROVA N° 8.- A. LA TROBADA


El ratolí pot recórrer $\binom{6}{3}$ camins fins arribar al punt B i el gat pot recórrer també $\binom{6}{3}$

camins fins al punt A. Per tant, els possibles camins són en total: $\binom{6}{3} \times \binom{6}{3} = 400$. D'altra

banda, la trobada es produeix sempre a la diagonal, es a dir, als punts M, N, P ó Q. Tant el gat com el ratolí poden arribar a eixos punts de 8 formes, pel que hi haurà 64 casos possibles d'arribar a la diagonal, de les quals en 20 ocasions coincideixen en el mateix lloc:

$$\binom{3}{0} \times \binom{3}{0} + \binom{3}{1} \times \binom{3}{1} + \binom{3}{2} \times \binom{3}{2} + \binom{3}{3} \times \binom{3}{3} = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 20. \quad \text{Per tant, la}$$

probabilitat de que el gat es mengi al ratolí és: $p = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$. Per tant, no és just que

aposten la mateixa quantitat els diuen que sí i els que diuen que no.

DIFICULTAT: 30

PROVA N° 8.- B. JUGANT A DETECTIUS

Podem tindre:

Enric	V	No pot ser que Enric i Pep diguen la veritat alhora, Per què s'acusen mútuament
Pep	V	
Lluïsa	F	

Enric	V	No pot ser que Enric i Lluïsa diguen la veritat Alhora, per què una nega a l'altre
Pep	F	
Lluïsa	V	

Enric	F	És l'única opció. Aleshores el culpable és Enric
Pep	V	
Lluïsa	V	

DIFICULTAT: 20

PROVA N° 9.- A. NUMERIGRAMA

Únicament n'hi ha dos solucions:

$$\boxed{9} - \boxed{5} = \boxed{4}$$

x

$$\boxed{6} \div \boxed{3} = \boxed{2}$$

=

$$\boxed{1} + \boxed{7} = \boxed{8}$$

DIFICULTAT: 20

$$\boxed{9} - \boxed{5} = \boxed{4}$$

x

$$\boxed{6} \div \boxed{3} = \boxed{2}$$

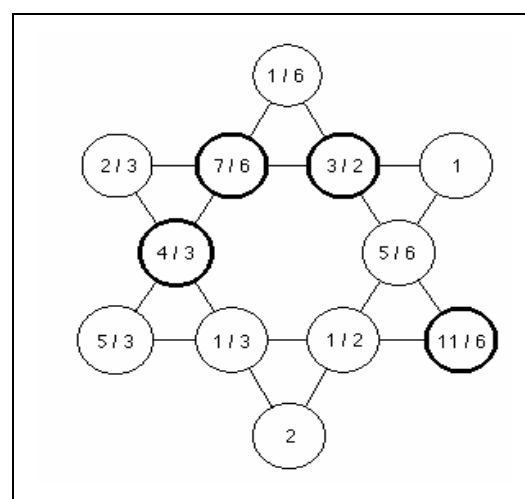
=

$$\boxed{7} + \boxed{1} = \boxed{8}$$

PROVA N° 9.- B. ESTEL MÀGIC

Com podem comprovar, la suma de cada línia ha de ser $13/3$. Així, la solució és la següent:

DIFICULTAT: 20

**PROVA N° 10.- A. VIATGE DE VACANCES**

Siguen a i b el nombre d'homes i dones que hi ha al grup de turistes. Aleshores, es compleix:

$$\frac{764 \cdot a + 855 \cdot b}{a + b} = 816 \rightarrow 764 \cdot a + 855 \cdot b = 816 \cdot a + 816 \cdot b \rightarrow 52 \cdot a = 39 \cdot b.$$

Per tant: $\frac{a}{b} = \frac{39}{52}$. Per això podem suposar que n'hi ha 39 homes i 52 dones. Aleshores, la

proporció d'homes és: $\frac{39}{39 + 52} = \frac{39}{91} = 0,428 \approx 43\%$.

Per tant, al grup de turistes n'hi ha un 43% d'homes i un 57% de dones.

DIFICULTAT: 20

PROVA N° 10.- B. TRAJECTE FERROVIARI

Com que el TALGO comença el seu viatge 2 hores després del exprés, això vol dir que porta $60 \times 2 = 120$ km d'avantatge. Per tant, les fórmules que donen l'espai recorregut en funció del temps són, en cada cas, les següents:

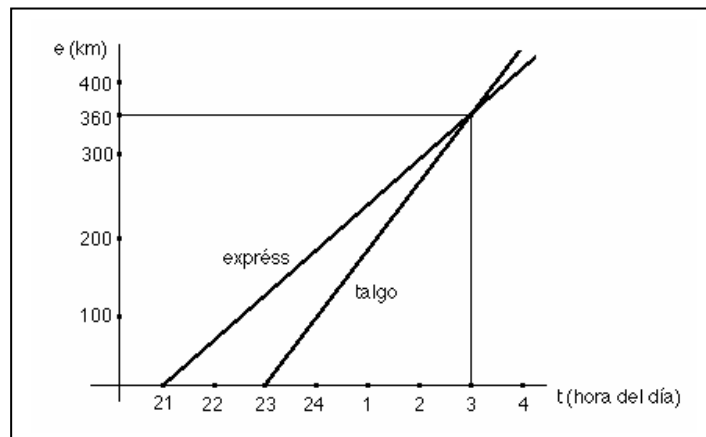
Exprés: $e = 120 + 60 \cdot t$ (a)

 TALGO: $e = 90 \cdot t$ (b)

on t s'expressa en hores. Per suposat, suposem que l'origen de temps és les 23 hores, és a dir, a les 23 hores és $t=0$. De forma que a les 21 hores, és $t=-2$, a les 22 hores, és $t=-1$, a les 24 hores és $t=1$, etc. Les taules de valors i les gràfiques són les següents:

(a)	
t	e
-2	0
-1	60
0	120
1	180
2	240
3	300
4	360

(b)	
t	e
0	0
1	90
2	180
3	270
4	360



El punt de tall de les gràfiques s'obté per l'equació: $60 \cdot t + 120 = 90 \cdot t$. D'on: $30 \cdot t = 120 \rightarrow t = 4$ hores, i per tant, l'espai és: $e = 90 \cdot 4 = 360$ km. És a dir, el TALGO troba a l'express a les 3 de la matinada i a 360 km de València.

DIFICULTAT: 20



S
E
M
C
V
AL KHWĀRIZMĪ

XII OLIMPIADA MATEMÀTICA
PROVINCIA DE VALÈNCIA - FASE PROVINCIAL
5 DE MAIG DE 2001
PROVA INDIVIDUAL - SOLUCIONS

PROBLEMES NIVELL A (2on. ESO)

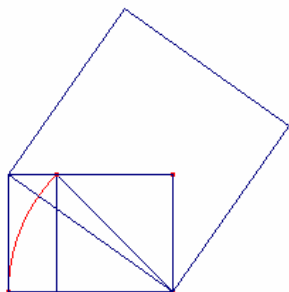
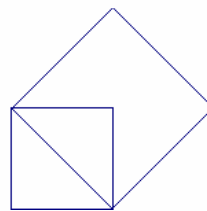
1.- DAVID I GOLIAT

Des de 90 peus i 3 polzades fins 11 peus i 9 polzades. O siga, desde 282 cm. fins 358 cm.

2.- DUPLICAR UN QUADRAT

a.- Es construeix a partir de la diagonal del quadrat inicial:

de manera que el nou quadrat tindrà d'àrea: $2 \cdot a^2$.



b.- En primer lloc, traslladem la diagonal del quadrat inicial a la base, de manera que ens construïm un rectangle de costats a i $a \cdot \sqrt{2}$. La diagonal del rectangle mesurarà $a \cdot \sqrt{3}$, que serà el costat del nou quadrat, l'àrea del qual serà, aleshores, $3 \cdot a^2$.

3.- ELS QUATRE APARELLS

El problema es pot resoldre de diverses formes. Proposta 1: Segons l'enunciat, com a molt el 15% no tenen televisió, com a molt el 25% no tenen vídeo, com a molt el 20% no tenen aparell de música, i com a molt el 30% no tenen ordinador. Això implica que en total, com a molt, el 90% no té algun dels quatre aparells, i per tant, al menys el 10% tindrà els quatre.

4.- UN LLIBRE

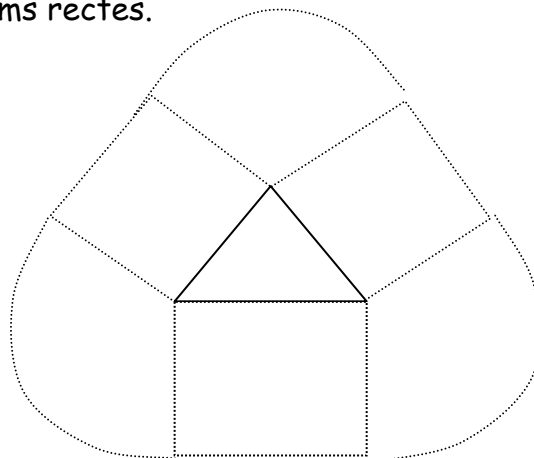
420 pàgines.

5.- ACCIDENT NUCLEAR

La superfície contaminada tindrà la forma de la següent figura, que s'ha obtingut dibuixant quadrants de circumferència d'un quilòmetre de radi amb centre cadascun dels vèrtex, i unint-los per quatre trams rectes.

La superfície està formada per tres quadrats d'un quilòmetre de costat, un cercle de radi 1 km., i el triangle equilàter de costat 1 km. Aleshores, l'àrea total serà:

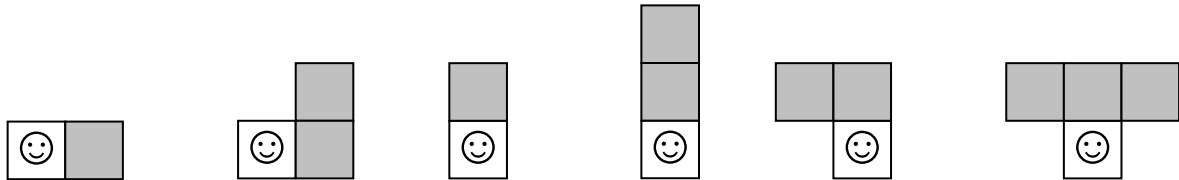
$$A = 3 + \pi + \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 6.5746 \text{ Km}^2.$$



6.- MALA CARA

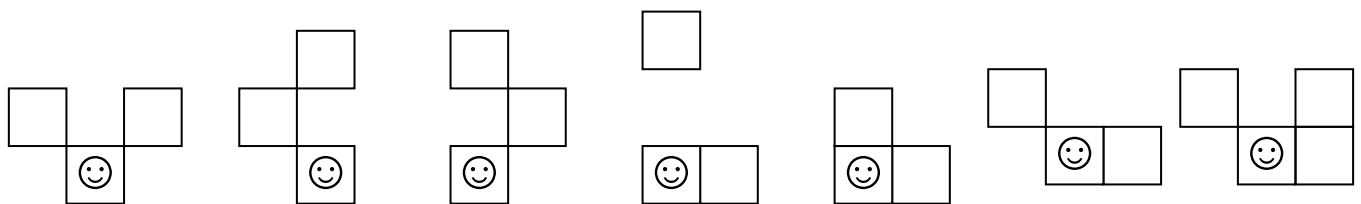
En este tipus de joc és freqüent recórrer a l'estratègia de començar pel final i analitzar els passos anterior.

A.- Guanya quan el que li toca tirar s'encontra amb una de les següents situacions (no estan totes):

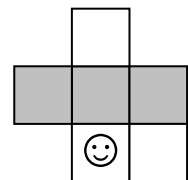


Indicant la part ombrejada els quadres que s'han de tatxar per a guanyar.

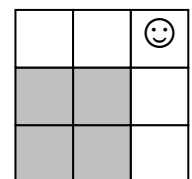
S'anomenen situacions guanyadores. Són situacions perdedores, les següents (no estan totes):



Es pot guanyar tatxant completament la segon fila, sent aquesta una estratègia guanyadora.



B.- Es pot guanyar tatxant completament el quadrat següent:



PROBLEMES NIVELL B (4rt. ESO)

1.- BLANC Y NEGRE

Successió d'àrees blanques: $1, \frac{1}{4}, \frac{10}{16}, \frac{28}{64}, \dots$ Successió d'àrees negres: $0, \frac{3}{4}, \frac{6}{16}, \frac{36}{64}, \dots$

Si b_n y n_n son, respectivament, el número de triangles blancs i negres en la posició n , es compleix: (1) $b_n = b_{n-1} + 3n_{n-1}$ (2) $n_n = 3b_{n-1} + n_{n-1}$ per a $n=1, 2, 3, \dots$ D'altra banda,

es compleix (3) $b_n + n_n = 4^n$ per a $n=0, 1, 2, 3, \dots$ Amb molt de treball, es pot deduir que $b_n = 3 \cdot 4^{n-1} - 2b_{n-1}$ per a $n=1, 2, 3, \dots$ D'on es dedueix, amb una bona dosi de paciència, que: $b_n = \frac{4^n + (-2)^n}{2}$ i $n_n = \frac{4^n - (-2)^n}{2}$ per a $n=0, 1, 2, 3, \dots$

Per tant, l'àrea blanca en la posició n és: $B_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ i l'àrea negra en la posició n és:

$$N_n = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \text{ per a } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

a) Per tant, l'àrea blanca al lloc 5 és: $B_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{31}{64}$. L'àrea negra al lloc 5 és

$$N_5 = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{17}{32}.$$

b) L'àrea blanca al lloc 20 és: $B_{20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{20} \approx 0,5$. L'àrea negra al lloc 20 és:

$$N_{20} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{20} \approx 0,5.$$

c) L'àrea blanca en la posició n és: $B_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ i l'àrea negra en la posició n és:

$$N_n = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \text{ per a } n = 0, 1, 2, 3, \dots \text{ Així, quan } n \rightarrow \infty, \text{ es compleix que } B_n \rightarrow \frac{1}{2} \text{ i } N_n \rightarrow \frac{1}{2}.$$

És a dir, les àrees blanques i negres son iguals a la llarga.

DIFICULTAT: 50.

2.- LLOGUER DE COTXES

Les funcions corresponents a cadascuna de les companyies son:

Autoviatges $\rightarrow Y=11900$ (a)

Lloguimòvil $\rightarrow Y=1000 \cdot 7 + 6'5x \rightarrow Y=7000+6'5x$ (b)

Rentacar $\rightarrow Y = \begin{cases} 6000, & \text{per a } x \leq 500 \\ 22x - 5000, & \text{per a } x > 500 \end{cases}$ (c)

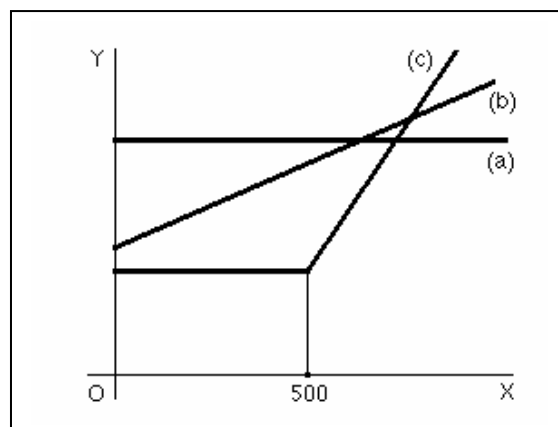
Les gràfiques son:

(b)

X	Y
0	7000
100	7650
400	9600
500	10250
700	11550
800	12200

(c)

X	Y
0	6000
100	6000
400	6000
500	6000
700	10400
800	12600



El punt de tall de les gràfiques (a) i (c) s'obté per l'equació: $22x - 5000 = 11900$ $\Rightarrow 22x = 16900$ $\Rightarrow x = 768$. Per tant, si $x \leq 768$, ens convé elegir la companyia (c) Rentacar; si $x > 768$, ens convé elegir la companyia (a) Autoviatges.

DIFICULTAT: 20

3.- TAULER

Com únicament pot haver una fitxa per fila, per a col·locar-la a la primera fila, tenim que elegir una columna: n'hi ha 6 possibilitats; una vegada elegida la columna, la fitxa que posarem a la segona fila únicament pot elegir-se entre cinc columnes; i així successivament. Hi ha $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ formes de col·locar les fitxes al tauler.

A la 1ª fila, la fitxa estarà a la casella nombre $0 + a$

A la 2ª fila, la fitxa estarà a la casella nombre $6 + b$

A la 3ª fila, la fitxa estarà a la casella nombre $12 + c$

A la 4ª fila, la fitxa estarà a la casella nombre $18 + d$

A la 5ª fila, la fitxa estarà a la casella nombre $24 + e$

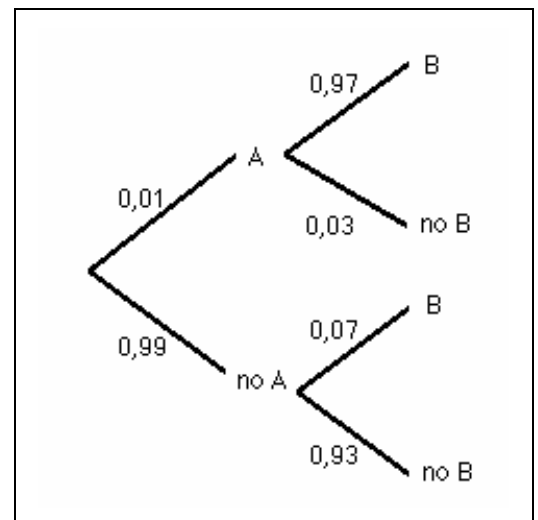
A la 6ª fila, la fitxa estarà a la casella nombre $30 + f$

on els nombres (a, b, c, d, e, f) formen una permutació dels nombres (1, 2, 3, 4, 5, 6), ja que les fitxes no poden col·locar-se a la mateixa columna. Per tant, totes les sumes son iguals i el valor comú d'aquestes sumes és:

$$S = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) + (0 + 6 + 12 + 18 + 24 + 30) = 111. \text{ DIFICULTAT: 40.}$$

4.- DIAGNÒSTIC FIABLE?

Considerem els successos $A = \text{"la persona està malalta"}$, $B = \text{"la prova és positiva"}$. Per les condicions del problema, es compleix: $p(B/A) = 0.97$, $p(\bar{B}/A) = 0.03$, $p(A) = 0.01$. Amb aquests dades podem omplir el següent diagrama d'arbre:



Utilitzant el diagrama d'arbre, construïm la corresponent taula de contingències:

	A	no A	TOTAL
B	$0.01 \times 0.97 = 0.0097$	$0.99 \times 0.07 = 0.0693$	0.079
no B	$0.01 \times 0.03 = 0.0003$	$0.99 \times 0.93 = 0.9207$	0.921
TOTAL	0.01	0.99	1

En aquesta taula tenim les probabilitats següents:

	A	no A	TOTAL
B	$p(A \cap B) = 0.0097$	$p(\bar{A} \cap B) = 0.0693$	$p(B) = 0.079$
no B	$p(A \cap \bar{B}) = 0.0003$	$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.9207$	$p(\bar{B}) = 0.921$
TOTAL	$p(A) = 0.01$	$p(\bar{A}) = 0.99$	1

Per tant:

a) La probabilitat de que la prova resulte positiva és $p(B) = 0.079$.

b) La probabilitat de que la persona tinga la SIDA, quan la prova és positiva és:

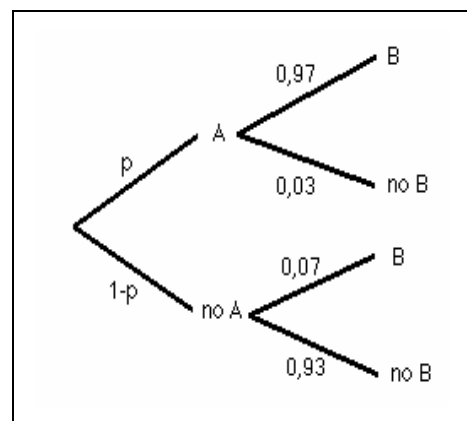
$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0.0097}{0.079} \approx 0.1228.$$

c) La probabilitat de que la persona tinga la SIDA, malgrat que la prova és negativa és:

$$p(A/\bar{B}) = \frac{p(A \cap \bar{B})}{p(\bar{B})} = \frac{0.0003}{0.921} \approx 0.0003.$$

d) La prova pareix fiable per a descartar la malaltia, ja que la probabilitat de tindre la SIDA si la prova és negativa és molt xicoteta. En canvi, no pareix una prova massa fiable per a confirmar la malaltia, ja que la probabilitat de estar malalt si la prova és positiva és únicament del 12%.

Suposem un grup de població en que la probabilitat de tindre la malaltia és p . Aleshores, el diagrama d'arbre i la taula de contingència corresponent serien:



	A	$\bar{A}$	TOTAL
B	$0.97 \cdot p$	$0.07 \cdot (1-p)$	$0.9 \cdot p + 0.07$
$\bar{B}$	$0.03 \cdot p$	$0.93 \cdot (1-p)$	$0.93 - 0.9 \cdot p$
TOTAL	p	$1-p$	1

Aleshores, la probabilitat de tindre la SIDA si la prova és positiva és:

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0.97 \cdot p}{0.9 \cdot p + 0.07} \quad \text{i la probabilitat de tindre la SIDA si la prova és}$$

$$\text{negativa és: } p(A/\bar{B}) = \frac{p(A \cap \bar{B})}{p(\bar{B})} = \frac{0.03 \cdot p}{0.93 - 0.9 \cdot p}. \quad \text{Suposem que } p(A/\bar{B}) > p(A/B). \text{ Així:}$$

$$\frac{0.03 \cdot p}{0.93 - 0.9 \cdot p} > \frac{0.97 \cdot p}{0.9 \cdot p + 0.07} \rightarrow 0.03 \cdot p \cdot (0.9 \cdot p + 0.07) > 0.97 \cdot p \cdot (0.93 - 0.9 \cdot p). \quad \text{D'on:}$$

$$0.027 \cdot p^2 + 0.0021 \cdot p > 0.9021 \cdot p - 0.873 \cdot p^2 \rightarrow 0.9 \cdot p^2 - 0.9 > 0 \rightarrow 0.9 \cdot p \cdot (p - 1) > 0. \quad \text{Per}$$

tant, deu ser necessàriament: $p > 0$ i $p > 1$. Però una probabilitat no pot ser major que 1.

Per tant, per aquesta prova no és possible que $p(A/\bar{B}) > p(A/B)$. És a dir, és una prova per a descartar la malaltia, més que per a confirmar-la. DIFICULTAT: 40

5.- TORRONS

Aplicant el teorema de Pitàgores a la següent figura: $x^2 + x^2 = 10^2 \rightarrow x^2 = 50$. Per tant, l'àrea del quadrat és: $S_1 = (2x)^2 = 4x^2 = 4 \cdot 50 = 200 \text{ cm}^2$.

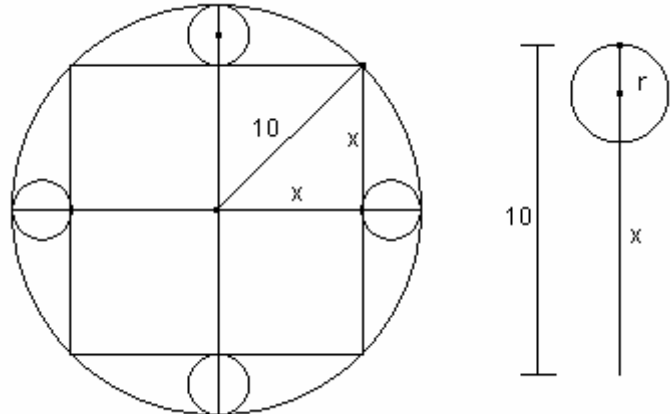
D'altra banda, el radi del cercle xicotet és: $r = \frac{10-x}{2} = \frac{10-\sqrt{50}}{2}$.

Per tant, l'àrea del cercle xicotet és:

$$S_2 = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\frac{10-\sqrt{50}}{2} \right)^2 \text{ cm}^2.$$

Aleshores, l'àrea total coberta per torró és:

$$A = S_1 + 4 \cdot S_2 = 200 + 4 \cdot \pi \left(\frac{10-\sqrt{50}}{2} \right)^2$$



Calculem ara l'àrea coberta pel torró a l'altre model. Aplicant el teorema de Pitàgores a la següent figura, resulta:

$$2 \cdot (10-r)^2 = 4r^2 \rightarrow 2(100 - 10r + r^2) = 4r^2 \rightarrow r^2 + 20 \cdot r - 100 = 0$$

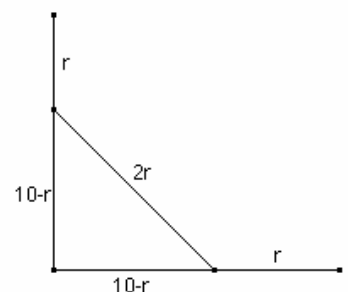
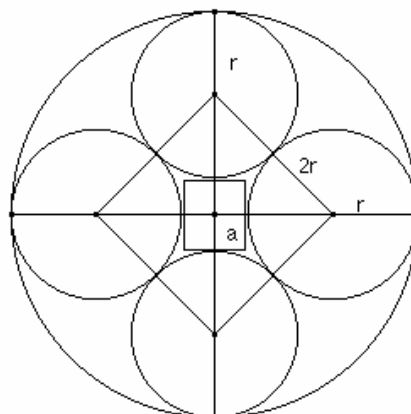
Per tant: $r = \frac{-20 \pm \sqrt{800}}{2} = -10 \pm \sqrt{200}$. La solució negativa no és possible. Per tant, deu ser $r = -10 + \sqrt{200} \text{ cm}$.

Per tant, l'àrea de cadascun dels quatre cercles tangents interiors és: $S_3 = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (\sqrt{200} - 10)^2 \text{ cm}^2$.

D'altra banda, el costat a del quadrat interior es pot calcular així: $\frac{a}{2} = 10 - 2r \rightarrow a = 2(10 - 2r) = 4(5 - r) = 4(5 - \sqrt{200} + 10) = 4(15 - \sqrt{200}) \text{ cm}$.

Per tant, l'àrea del quadrat interior és: $S_4 = a^2 = 16(15 - \sqrt{200})^2 \text{ cm}^2$.

Per tant, l'àrea total coberta pel torró en aquest model és:



$B = 4S_3 + S_4 = 4 \cdot \pi \cdot (\sqrt{200} - 10)^2 + 16 \cdot (15 - \sqrt{200})^2 = 227.38 \text{ cm}^2$. És evident que el fabricant elegirà el primer model perquè el torró en aquest model ocupa menys superfície. DIFICULTAT: 40

6.- NOMBRE CAPICUA

Siga $N=abba$ el nombre pensat per Joan. Com la suma de les xifres és 16, ha de ser $2a+2b=16$. D'altra banda, al intercanviar les xifres i restar el nombre pensat, el resultat és 5346. Per tant, ha de complir-se: $baab - abba = 5346$.

Ara bé, per l'expressió polinòmica d'un nombre, sabem que $baab = 1000b + 100a + 10a + b$ i $abba = 1000a + 100b + 10b + a$.

Per tant: $1000b + 100a + 10a + b - 1000a - 100b - 10b - a = 5346$. D'on:

$$1000 \cdot (b - a) + 100 \cdot (a - b) + 10 \cdot (a - b) + (b - a) = 5346 \rightarrow (1000 - 100 - 10 + 1) \cdot (b - a) = 5346$$

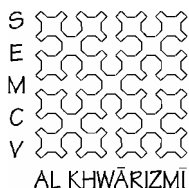
$$\text{Per tant: } 891 \cdot (b - a) = 5346 \rightarrow b - a = 6.$$

Aleshores tenim que resoldre el sistema d'equacions:
$$\left. \begin{array}{l} 2a + 2b = 16 \\ -a + b = 6 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b = 8 \\ -a + b = 6 \end{array} \right\}.$$

Utilitzem el mètode de reducció. Sumant les equacions: $2b = 14 \rightarrow b = 7$.

Restant la segona equació a la primera: $2a = 2 \rightarrow a = 1$.

Per tant, el nombre pensat per Joan és: $N=1771$. DIFICULTAT: 20.



XII OLIMPIADA MATEMÀTICA
PROVINCIA DE VALÈNCIA - FASE PROVINCIAL
5 DE MAIG DE 2001
PROVA PER EQUIPS - VELOCITAT - SOLUCIONS

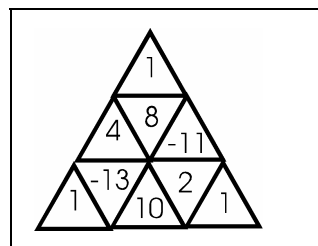
PROBLEMES NIVELL A (2on. ESO)

PROVA N° 1. TRIANGLE MÀGIC

Evidentment algun nombre ha de ser negatiu.

PROVA N° 2. DE CASA AL FORN

Es com un triangle de Tartaglia: El nombre combinatori que correspon al nombre de camins és sis sobre tres, és a dir 20.



PROVA N° 3. L'ILLA DE KOCH

La fórmula que es pot deduir per al perímetre de l'illa de Koch és :

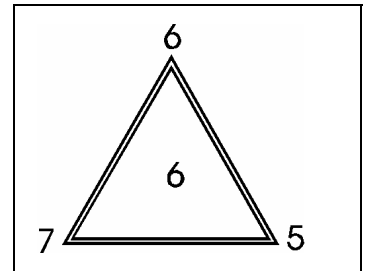
$$P = 3L \left(\frac{4}{3} \right)^n$$

on L és el costat del triangle llavor. Per a nostre valor de L obtenim: **P=9126**

PROVA N° 4. QUIN NOMBRE FALTA?

La regla per la que s'obtenen els successius triangles és la següent: els nombres de la vora giren en sentit antihorari i a la vegada augmenten un.

Per a obtenir el nombre central sumem els nombres de la base i li restem el del vèrtex superior. Així el triangle següent seria:


PROVA N° 5. LLETRES EN LA BÀSCULA

L'exercici es pot resoldre de moltes maneres, la menys estètica és amb un sistema d'equacions. Per qualsevol mètode obtenim:

$$X = 3$$

$$Y = 12$$

PROVA N° 6. QUADRAT A TROÇOS

Sumant totes les àrees obtenim 121 u.a. Com conseqüència el costat del quadrat original ha de mesurar 11 u.l.

PROVA N° 7. JUAN, PEDRO I LUIS

- Juan te un gos.
- Pedro te un gat.
- Luis te ungos.

PROVA N° 8. QUAN MESURA EL NOM DEL MEU FILL?

$$Longitud = 22 + 2\sqrt{20} + \pi + 0'5\pi + 1'5\pi + 4\pi$$

Estes operacions donen com resultat aproximat 60

PROVA N° 9. QUIN ÉS EL SEGÜENT?

Per a obtenir el següent terme de la successió se li suma al nombre el primer següent. Així $85 + 89 = 174$.

PROVA N° 10. TANGRAM


PROBLEMES NIVELL B (4rt. ESO)

PROVA N° 1.-TRENCACLOSQUES NUMÈRIC

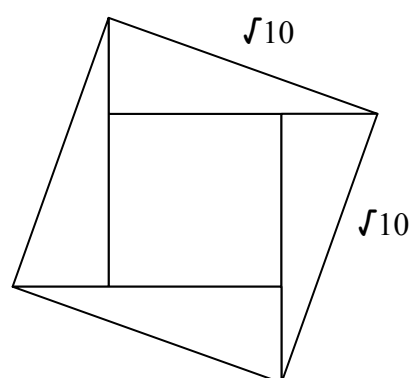
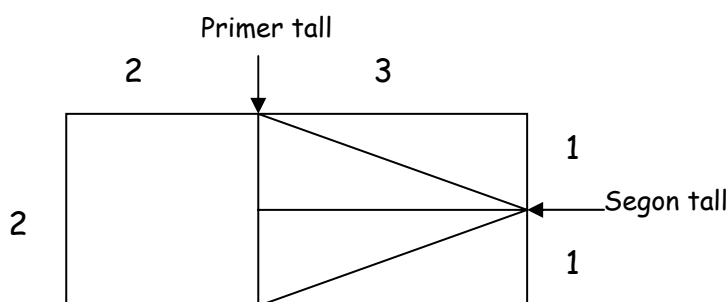
1	9	9	9	
2	2		1	4
5		2	4	2
	2	8		0
1	9	8	6	

PROVA N° 2. ENDEVINA

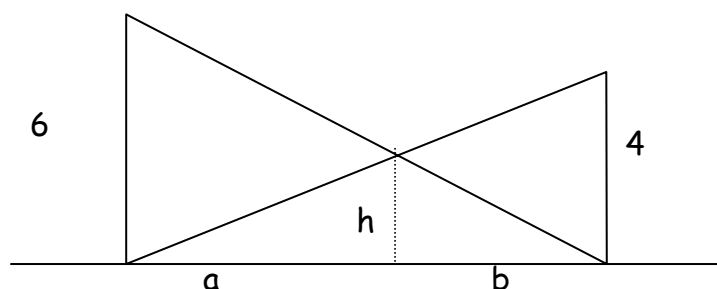
Es tracta del 402.163

PROVA N° 3. EL TALL ECONÒMIC

Amb quatre talls resulta una solució vàlida, però la òptima és amb tres. Cal començar per tallar un quadrat 2X2 i després tallar el triangle restant en dos rectangles de 3X1. A continuació cal posar un damunt de l'altre i tallar al llarg de la diagonal, obtenint quatre triangles rectangles idèntics, que encaixen perfectament entorn del quadrat 2X2, formant un quadrat de $\sqrt{10} \times \sqrt{10}$. Encara que el tapet hagué de ser més menut a causa de les costures, no hi ha dubte de que cubria perfectament la taula de 3X3.

**PROVA N° 4. ELS PALS DEL BARCO**

És impossible trobar la distància entre els màstils. L'altura a la que es creuen els cables serà sempre de 2,4 m., siga la que siga la distància que els separa. Recolzant-se en la figura, i tenint en compte la semblança de triangles,



$$\frac{h}{4} = \frac{a}{a+b} \quad (1)$$

$$\frac{h}{6} = \frac{b}{a+b} \quad (2)$$

Dividim (1) entre (2) resulta: $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$. Aleshores, a partir de (1) tenim:

$$\frac{h}{4} = \frac{1}{1 + \frac{b}{a}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} \Rightarrow h = 2,4$$

PROVA N° 5. ANGLES EN EL RELLOTGE

L'error més corrent en aquest cas és el de pensar que la maneta horària segueix fixa en les 3. El minuter avança a raó de 6° per minut. Així doncs, en els 12 minuts transcorreguts des de les 3 en punt, el minuter haurà corregut un angle de $12 \times 6 = 72^\circ$. Però 12 minuts són $1/5$ d'hora, pel que l'agulla horària haurà girat la cinquena part de l'angle que va des de les 3 fins a les 4, (30°), o siga, 6° . Aleshores, l'angle entre les manetes és de $18^\circ + 6^\circ = 24^\circ$.

PROVA N° 7. ARITMÈTICOGRAMES

X=3 Y=10 Z=7
A=-2 B=-5 C=3

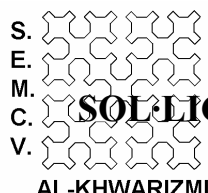
PROVA N° 8. ASSIGNATURES OPTATIVES

- 1.- ID IM IR IQ IT DM DR DQ DT MR MQ MT RQ RT QT
- 2.- La probabilitat d'eleger ID és $1/15 = 6.66\%$
- 3.- La probabilitat de que una assignatura siga Q és de $5/15 = 33.33\%$

PROVA N° 10. MATGRAM



Te falta algun exemplar de la revista **Problemes Olímpics**? Si vols ens la pots demanar i te l'enviem a la teua adreça.



SOL·LICITUD D'ENVIAMENT DE NÚMEROS ANTERIORS DE "PROBLEMES OLÍMPICS"

Nom _____ Cognoms _____

Adreça _____ Telèfon _____

C.P. _____ Població _____ Província _____

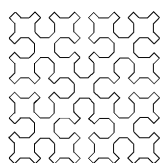
Correu-e: _____ Tasca docent (curs, nivell, etc.) _____

Desitge rebre els següents números de la revista "Problemes Olímpics" a la meua adreça:

- ☐ X Olimpíada Matemàtica 1998-99 N° 1 (200 ptes.)
- ☐ X Olimpíada Matemàtica 1998-99 N° 2 (200 ptes.)
- ☐ X Olimpíada Matemàtica 1998-99 N° 3 (200 ptes.)
- ☐ Problemes Olímpics N° 1 (400 ptes.)
- ☐ Problemes Olímpics N° 2 (200 ptes.)
- ☐ Problemes Olímpics N° 3 (200 ptes.)
- ☐ Problemes Olímpics N° 4 (200 ptes.)
- ☐ Problemes Olímpics N° 5 (400 ptes.)
- ☐ Problemes Olímpics N° 6 (300 ptes.)
- ☐ Problemes Olímpics N° 7 (300 ptes.)
- ☐ Problemes Olímpics N° 8 (300 ptes.)
- ☐ Problemes Olímpics N° 9 (300 ptes.)

Ens envies aquesta butlleta complimentada a la nostra adreça: Societat d'Educació Matemàtica "Al-Khwarizmi", Apartat 22.045, 46071-València, indicant en el sobre "Revista Problemes Olímpics", incloent el justificant d'ingrés del preu total dels exemplars que sol·licites al nostre compte de la CAM: 2090-2842-0040032323.

Vols fer-te soci? Ompli la següent butlleta d'inscripció i ens l'envies a la nostra seu. Anima als teus companys a formar part de la nostra societat.



Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana

"Al Khwārizmī"

Escola Universitària de Magisteri "Ausàs March"
Departament de Didàctica de la Matemàtica
Apartat 22.045 46071 VALÈNCIA

INSCRIPCIÓ I DOMICILIACIÓ BANCÀRIA

Cognoms:.....Nom:.....

DNI / NIF:.....

Domicili particular:

Població:.....D.P.:.....

Carrer:..... Telèfon:.....

Correu-e:.....

Centre de treball:

Nom:.....

Carrer:.....Població:.....D.P.:.....

Telèfon:..... Correu-e:.....

Entitat bancària (on es lliurarà el cobrament de quotes):

Nom:.....

Carrer:.....Població:.....D.P.:.....

Codi Compte Client:

Entitat

Oficina

D.C.

Nº Compte

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--



Sr. Director de la Sucursal.....

del Banc/Caixa d'Estalvis.....

Distingit Senyor:

Us pregue que atengueu, amb càrrec al meu compte nº: c/c - llibreta:, i fins a nova ordre, els rebuts que anualment siguen presentats a nom de per la Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al Khwārizmī".

Atentament,

.....a.....de.....de 200..

(signatura)

El titular del compte:.....

DNI:.....

Adreça:.....

La celebració de la XII edició de l'Olimpíada Matemàtica de Secundària ha constituït de nou un èxit de participació. Hem vist incrementada de manera espectacular la participació d'alumnes i d'instituts a les fases comarcals i provincials, de manera que el nostre certamen es converteix en un referent dins de la comunitat educativa. Resulta paradoxal pensar en que un grapat d'adolescents es reuneixen un dia amb el motiu de competir en la resolució de problemes de matemàtiques, sent una de les assignatures menys estimades dins del camp de l'educació. Tanmateix, ací teniu el resultat que ens mou any rere any a treballar per a portar a bon terme aquest event.

Volem aprofitar des d'ací per a agrair la participació de tots els estudiants, professors i professores, i les comissions provincials de la Societat, que han treballat per a desenvolupar amb èxit la present edició de l'Olimpíada Matemàtica.

Seleccionats per a la XII Olimpíada Matemàtica Nacional NIVELL A - 2ON D'E.S.O.			
Nº	Participant	Centre	Localitat
1	Rico Beltrán - Manuel	C. Sagrada Familia	Elda
2	Bailén Marcos - Laura	C. Sagrada Familia	Elda
3	Albeza Mirete - Victor	C.P. Enric Valor	Alacant
Reserves			
1	Oliver Albert - Antonio	C. Sagrada Familia	Elda
2	Lazaro Moreno - Cecilia	IES Vicent Castell Domenech	Castelló

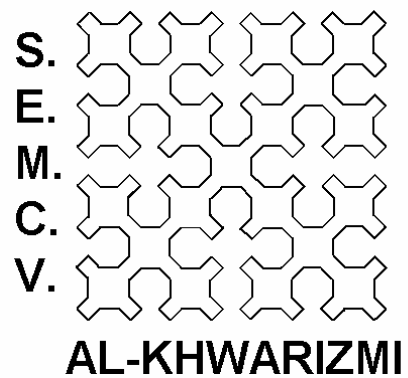
Guanyadors de la fase Autonòmica 2001 NIVELL B - 3ER I 4RT D'E.S.O.			
Nº	Participant	Centre	Localitat
1	Blanca Ruiz - Mohammed	I.E.S Ausias March	Manises
2	Mislata Valero - Santiago.	I.E.S 1	Utiel
3	Arizleta Delshorts - Mikel	IES Ramon Cid.	Benicarlo

GUANYADORS DE LA PROVA D'EQUIPS : MATEMÀTIQUES PÚBLIQUES			
Nº	Participant	Centre	Localitat
1	Rabaza Giner - Jeronimo	IES "Morella.	Morella
	González Ciller - Lorena	IES N.º 2.	El Campello
	Adam Ortiz - Rosa	C. "Sagrado Corazón" Maristas	Valencia
2	Kwan Fernandez - Yun Joi	IES Politecnico	Castellón
	Leyva Díaz - Eduardo	IES "Sixto Marco"	Elx
	Catalá Lloret - Joaquín	C. "Nta. Sra. del Carmen"	Gandia
3	Rochera Parrado - Manuel	C.P. "Lope de Vega."	Nules
	Lloret Guerrero - Lorenzo	C. "Abad Sola"	Gandía
	Albeza Mirete - Victor	C.P. "Enric Valor"	Alacant

Tomás Queralt Llopis. Coordinador Olimpíada Provincial València.

Floreal Gracia Alcaine. Coordinador Olimpíada Provincial Castelló.

José Luis García Valls. Coordinador Olimpíada Provincial Alacant i Autonòmica 2001.



**Societat d'Educació Matemàtica de la
Comunitat Valenciana
"Al-Khwarizmi"**